

1 Representaciones: repaso y continuación)

- Representaciones de C^* -álgebras conmutativas (I).
- C^* -álgebras de grupos discretos.

1 Representaciones: repaso y continuación)

- Representaciones de C^* -álgebras conmutativas (I).
- C^* -álgebras de grupos discretos.

2 Teorema de Gelfand-Naimark

- Funcionales positivas (I)
- Construcción GNS (Gelfand-Naimark-Segal)
- Funcionales Positivas (II)
- Estados
- Teorema de Gelfand–Naimark

Definición

Una representación de una $$ -álgebra A en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un homomorfismo de $*$ -álgebras $\pi : A \rightarrow B(\mathcal{H})$.*

Definición

Una representación de una $$ -álgebra A en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un homomorfismo de $*$ -álgebras $\pi : A \rightarrow B(\mathcal{H})$.*

Definición

Dadas representaciones $\pi : A \rightarrow B(\mathcal{H})$ y $\pi' : A \rightarrow B(\mathcal{H}')$, los elementos del conjunto

Definición

Una representación de una $$ -álgebra A en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un homomorfismo de $*$ -álgebras $\pi : A \rightarrow B(\mathcal{H})$.*

Definición

Dadas representaciones $\pi : A \rightarrow B(\mathcal{H})$ y $\pi' : A \rightarrow B(\mathcal{H}')$, los elementos del conjunto

Definición

Una representación de una $$ -álgebra A en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un homomorfismo de $*$ -álgebras $\pi : A \rightarrow B(\mathcal{H})$.*

Definición

Dadas representaciones $\pi : A \rightarrow B(\mathcal{H})$ y $\pi' : A \rightarrow B(\mathcal{H}')$, los elementos del conjunto

$$\mathcal{I}(\pi, \pi') := \{ T \in B(\mathcal{H}, \mathcal{H}') : T\pi(a) = \pi'(a)T, \forall a \in A \}$$

Definición

Una representación de una $$ -álgebra A en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un homomorfismo de $*$ -álgebras $\pi : A \rightarrow B(\mathcal{H})$.*

Definición

Dadas representaciones $\pi : A \rightarrow B(\mathcal{H})$ y $\pi' : A \rightarrow B(\mathcal{H}')$, los elementos del conjunto

$$\mathcal{I}(\pi, \pi') := \{ T \in B(\mathcal{H}, \mathcal{H}') : T\pi(a) = \pi'(a)T, \forall a \in A \}$$

se llaman operadores de intercambio.

Definición

Una representación de una $$ -álgebra A en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un homomorfismo de $*$ -álgebras $\pi : A \rightarrow B(\mathcal{H})$.*

Definición

Dadas representaciones $\pi : A \rightarrow B(\mathcal{H})$ y $\pi' : A \rightarrow B(\mathcal{H}')$, los elementos del conjunto

$$\mathcal{I}(\pi, \pi') := \{ T \in B(\mathcal{H}, \mathcal{H}') : T\pi(a) = \pi'(a)T, \forall a \in A \}$$

se llaman operadores de intercambio. Si existe $T \in \mathcal{I}(\pi, \pi')$ unitario se dice que π y π' son unitariamente equivalentes.

Definición

Una representación de una $$ -álgebra A en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un homomorfismo de $*$ -álgebras $\pi : A \rightarrow B(\mathcal{H})$.*

Definición

Dadas representaciones $\pi : A \rightarrow B(\mathcal{H})$ y $\pi' : A \rightarrow B(\mathcal{H}')$, los elementos del conjunto

$$\mathcal{I}(\pi, \pi') := \{ T \in B(\mathcal{H}, \mathcal{H}') : T\pi(a) = \pi'(a)T, \forall a \in A \}$$

se llaman operadores de intercambio. Si existe $T \in \mathcal{I}(\pi, \pi')$ unitario se dice que π y π' son unitariamente equivalentes.

Si $\pi = \pi'$ en lugar de $\mathcal{I}(\pi, \pi')$ se pone $\pi(A)'$, y a este conjunto se le llama conmutante de $\pi(A)$,

Definición

Una representación de una $$ -álgebra A en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un homomorfismo de $*$ -álgebras $\pi : A \rightarrow B(\mathcal{H})$.*

Definición

Dadas representaciones $\pi : A \rightarrow B(\mathcal{H})$ y $\pi' : A \rightarrow B(\mathcal{H}')$, los elementos del conjunto

$$\mathcal{I}(\pi, \pi') := \{ T \in B(\mathcal{H}, \mathcal{H}') : T\pi(a) = \pi'(a)T, \forall a \in A \}$$

se llaman operadores de intercambio. Si existe $T \in \mathcal{I}(\pi, \pi')$ unitario se dice que π y π' son unitariamente equivalentes.

Si $\pi = \pi'$ en lugar de $\mathcal{I}(\pi, \pi')$ se pone $\pi(A)'$, y a este conjunto se le llama conmutante de $\pi(A)$, ya que

$$\pi(A)' = \{ T \in B(\mathcal{H}) : T\pi(a) = \pi(a)T, \forall a \in A \}.$$

Definición

Una representación de una $$ -álgebra A en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un homomorfismo de $*$ -álgebras $\pi : A \rightarrow B(\mathcal{H})$.*

Definición

Dadas representaciones $\pi : A \rightarrow B(\mathcal{H})$ y $\pi' : A \rightarrow B(\mathcal{H}')$, los elementos del conjunto

$$\mathcal{I}(\pi, \pi') := \{ T \in B(\mathcal{H}, \mathcal{H}') : T\pi(a) = \pi'(a)T, \forall a \in A \}$$

se llaman operadores de intercambio. Si existe $T \in \mathcal{I}(\pi, \pi')$ unitario se dice que π y π' son unitariamente equivalentes.

Si $\pi = \pi'$ en lugar de $\mathcal{I}(\pi, \pi')$ se pone $\pi(A)'$, y a este conjunto se le llama conmutante de $\pi(A)$, ya que

$$\pi(A)' = \{ T \in B(\mathcal{H}) : T\pi(a) = \pi(a)T, \forall a \in A \}.$$

Definición

Se dice que $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{H}$ es π -invariante si $\pi(A)\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$.

Definición

Se dice que $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{H}$ es π -invariante si $\pi(A)\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$.

Definición

Se dice que $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{H}$ es π -invariante si $\pi(A)\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$. Si existe un subespacio cerrado π -invariante $\mathcal{K}$, con $0 \neq \mathcal{K} \neq \mathcal{H}$, se dice que π es reducible.

Definición

Se dice que $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{H}$ es π -invariante si $\pi(A)\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$. Si existe un subespacio cerrado π -invariante $\mathcal{K}$, con $0 \neq \mathcal{K} \neq \mathcal{H}$, se dice que π es reducible. En caso contrario se dice que π es irreducible.

Teorema (Lema de Schur)

Sea $\pi : A \rightarrow B(\mathcal{H}_\pi)$ una representación de la C^* -álgebra A .

Definición

Se dice que $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{H}$ es π -invariante si $\pi(A)\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$. Si existe un subespacio cerrado π -invariante $\mathcal{K}$, con $0 \neq \mathcal{K} \neq \mathcal{H}$, se dice que π es reducible. En caso contrario se dice que π es irreducible.

Teorema (Lema de Schur)

Sea $\pi : A \rightarrow B(\mathcal{H}_\pi)$ una representación de la C^* -álgebra A .

Definición

Se dice que $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{H}$ es π -invariante si $\pi(A)\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$. Si existe un subespacio cerrado π -invariante $\mathcal{K}$, con $0 \neq \mathcal{K} \neq \mathcal{H}$, se dice que π es reducible. En caso contrario se dice que π es irreducible.

Teorema (Lema de Schur)

Sea $\pi : A \rightarrow B(\mathcal{H}_\pi)$ una representación de la C^* -álgebra A . Entonces π es irreducible si y sólo si $\pi(A)' = \mathbb{C}Id_{\mathcal{H}_\pi}$.

Definición

Se dice que la representación $\pi : A \rightarrow B(\mathcal{H})$ es cíclica si existe $\xi \in \mathcal{H}$ tal que $\overline{\pi(A)\xi} = \mathcal{H}$.

Definición

Se dice que $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{H}$ es π -invariante si $\pi(A)\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$. Si existe un subespacio cerrado π -invariante $\mathcal{K}$, con $0 \neq \mathcal{K} \neq \mathcal{H}$, se dice que π es reducible. En caso contrario se dice que π es irreducible.

Teorema (Lema de Schur)

Sea $\pi : A \rightarrow B(\mathcal{H}_\pi)$ una representación de la C^* -álgebra A . Entonces π es irreducible si y sólo si $\pi(A)' = \mathbb{C}Id_{\mathcal{H}_\pi}$.

Definición

Se dice que la representación $\pi : A \rightarrow B(\mathcal{H})$ es cíclica si existe $\xi \in \mathcal{H}$ tal que $\overline{\pi(A)\xi} = \mathcal{H}$.

Definición

Se dice que $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{H}$ es π -invariante si $\pi(A)\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$. Si existe un subespacio cerrado π -invariante $\mathcal{K}$, con $0 \neq \mathcal{K} \neq \mathcal{H}$, se dice que π es reducible. En caso contrario se dice que π es irreducible.

Teorema (Lema de Schur)

Sea $\pi : A \rightarrow B(\mathcal{H}_\pi)$ una representación de la C^* -álgebra A . Entonces π es irreducible si y sólo si $\pi(A)' = \mathbb{C}Id_{\mathcal{H}_\pi}$.

Definición

Se dice que la representación $\pi : A \rightarrow B(\mathcal{H})$ es cíclica si existe $\xi \in \mathcal{H}$ tal que $\overline{\pi(A)\xi} = \mathcal{H}$. En ese caso se dice que ξ es un vector cíclico para π .

Definición

Se dice que $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{H}$ es π -invariante si $\pi(A)\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$. Si existe un subespacio cerrado π -invariante $\mathcal{K}$, con $0 \neq \mathcal{K} \neq \mathcal{H}$, se dice que π es reducible. En caso contrario se dice que π es irreducible.

Teorema (Lema de Schur)

Sea $\pi : A \rightarrow B(\mathcal{H}_\pi)$ una representación de la C^* -álgebra A . Entonces π es irreducible si y sólo si $\pi(A)' = \mathbb{C}Id_{\mathcal{H}_\pi}$.

Definición

Se dice que la representación $\pi : A \rightarrow B(\mathcal{H})$ es cíclica si existe $\xi \in \mathcal{H}$ tal que $\overline{\pi(A)\xi} = \mathcal{H}$. En ese caso se dice que ξ es un vector cíclico para π .

Proposición

Toda representación no degenerada es suma directa de representaciones cíclicas.

Representaciones de C^* -álgebras conmutativas I.

Representaciones de C^* -álgebras conmutativas I.

Sea $A = C_0(X)$ una C^* -álgebra conmutativa,

Representaciones de C^* -álgebras conmutativas I.

Sea $A = C_0(X)$ una C^* -álgebra conmutativa, y supongamos que μ es una medida positiva de Borel regular en X

Representaciones de C^* -álgebras conmutativas I.

Sea $A = C_0(X)$ una C^* -álgebra conmutativa, y supongamos que μ es una medida positiva de Borel regular en X (es decir: μ es una funcional lineal positiva en A).

Representaciones de C^* -álgebras conmutativas I.

Sea $A = C_0(X)$ una C^* -álgebra conmutativa, y supongamos que μ es una medida positiva de Borel regular en X (es decir: μ es una funcional lineal positiva en A).

Para cada $a \in A$, sea $M_a : L^2(\mu) \rightarrow L^2(\mu)$ tal que

Representaciones de C^* -álgebras conmutativas I.

Sea $A = C_0(X)$ una C^* -álgebra conmutativa, y supongamos que μ es una medida positiva de Borel regular en X (es decir: μ es una funcional lineal positiva en A).

Para cada $a \in A$, sea $M_a : L^2(\mu) \rightarrow L^2(\mu)$ tal que

$$M_a(f)(x) = a(x)f(x), \quad \forall f \in L^2(\mu).$$

Representaciones de C^* -álgebras conmutativas I.

Sea $A = C_0(X)$ una C^* -álgebra conmutativa, y supongamos que μ es una medida positiva de Borel regular en X (es decir: μ es una funcional lineal positiva en A).

Para cada $a \in A$, sea $M_a : L^2(\mu) \rightarrow L^2(\mu)$ tal que

$$M_a(f)(x) = a(x)f(x), \quad \forall f \in L^2(\mu).$$

Entonces $\pi_\mu : A \rightarrow B(L^2(\mu))$ tal que $\pi_\mu(a) = M_a$ es una representación no degenerada de A .

Representaciones de C^* -álgebras conmutativas I.

Sea $A = C_0(X)$ una C^* -álgebra conmutativa, y supongamos que μ es una medida positiva de Borel regular en X (es decir: μ es una funcional lineal positiva en A).

Para cada $a \in A$, sea $M_a : L^2(\mu) \rightarrow L^2(\mu)$ tal que

$$M_a(f)(x) = a(x)f(x), \quad \forall f \in L^2(\mu).$$

Entonces $\pi_\mu : A \rightarrow B(L^2(\mu))$ tal que $\pi_\mu(a) = M_a$ es una representación no degenerada de A .

Observar que $a \in \ker \pi_\mu$ sii $af = 0$ ctp $[\mu]$ $\forall f \in L^2(\mu)$,

Representaciones de C^* -álgebras conmutativas I.

Sea $A = C_0(X)$ una C^* -álgebra conmutativa, y supongamos que μ es una medida positiva de Borel regular en X (es decir: μ es una funcional lineal positiva en A).

Para cada $a \in A$, sea $M_a : L^2(\mu) \rightarrow L^2(\mu)$ tal que

$$M_a(f)(x) = a(x)f(x), \quad \forall f \in L^2(\mu).$$

Entonces $\pi_\mu : A \rightarrow B(L^2(\mu))$ tal que $\pi_\mu(a) = M_a$ es una representación no degenerada de A .

Observar que $a \in \ker \pi_\mu$ sii $af = 0$ ctp $[\mu]$ $\forall f \in L^2(\mu)$, es decir,

Representaciones de C^* -álgebras conmutativas I.

Sea $A = C_0(X)$ una C^* -álgebra conmutativa, y supongamos que μ es una medida positiva de Borel regular en X (es decir: μ es una funcional lineal positiva en A).

Para cada $a \in A$, sea $M_a : L^2(\mu) \rightarrow L^2(\mu)$ tal que

$$M_a(f)(x) = a(x)f(x), \quad \forall f \in L^2(\mu).$$

Entonces $\pi_\mu : A \rightarrow B(L^2(\mu))$ tal que $\pi_\mu(a) = M_a$ es una representación no degenerada de A .

Observar que $a \in \ker \pi_\mu$ sii $af = 0$ ctp $[\mu]$ $\forall f \in L^2(\mu)$, es decir, $a(x) = 0$ $\forall x \in \text{sop}(\mu)$.

Representaciones de C^* -álgebras conmutativas I.

Sea $A = C_0(X)$ una C^* -álgebra conmutativa, y supongamos que μ es una medida positiva de Borel regular en X (es decir: μ es una funcional lineal positiva en A).

Para cada $a \in A$, sea $M_a : L^2(\mu) \rightarrow L^2(\mu)$ tal que

$$M_a(f)(x) = a(x)f(x), \quad \forall f \in L^2(\mu).$$

Entonces $\pi_\mu : A \rightarrow B(L^2(\mu))$ tal que $\pi_\mu(a) = M_a$ es una representación no degenerada de A .

Observar que $a \in \ker \pi_\mu$ sii $af = 0$ ctp $[\mu]$ $\forall f \in L^2(\mu)$, es decir, $a(x) = 0$ $\forall x \in \text{sop}(\mu)$.

En otras palabras,

Representaciones de C^* -álgebras conmutativas I.

Sea $A = C_0(X)$ una C^* -álgebra conmutativa, y supongamos que μ es una medida positiva de Borel regular en X (es decir: μ es una funcional lineal positiva en A).

Para cada $a \in A$, sea $M_a : L^2(\mu) \rightarrow L^2(\mu)$ tal que

$$M_a(f)(x) = a(x)f(x), \quad \forall f \in L^2(\mu).$$

Entonces $\pi_\mu : A \rightarrow B(L^2(\mu))$ tal que $\pi_\mu(a) = M_a$ es una representación no degenerada de A .

Observar que $a \in \ker \pi_\mu$ sii $af = 0$ ctp $[\mu]$ $\forall f \in L^2(\mu)$, es decir, $a(x) = 0$ $\forall x \in \text{sop}(\mu)$.

En otras palabras, $\ker \pi_\mu = C_0(X \setminus \text{sop}(\mu))$.

Representaciones de C^* -álgebras conmutativas I.

Sea $A = C_0(X)$ una C^* -álgebra conmutativa, y supongamos que μ es una medida positiva de Borel regular en X (es decir: μ es una funcional lineal positiva en A).

Para cada $a \in A$, sea $M_a : L^2(\mu) \rightarrow L^2(\mu)$ tal que

$$M_a(f)(x) = a(x)f(x), \quad \forall f \in L^2(\mu).$$

Entonces $\pi_\mu : A \rightarrow B(L^2(\mu))$ tal que $\pi_\mu(a) = M_a$ es una representación no degenerada de A .

Observar que $a \in \ker \pi_\mu$ sii $af = 0$ ctp $[\mu]$ $\forall f \in L^2(\mu)$, es decir, $a(x) = 0$ $\forall x \in \text{sop}(\mu)$.

En otras palabras, $\ker \pi_\mu = C_0(X \setminus \text{sop}(\mu))$. En particular π_μ es *fiel* sii $\text{sop}(\mu) = X$.

C^* -álgebras de grupos discretos.

Definición

Una representación unitaria de un grupo discreto G en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un homomorfismo de grupos $u : G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$,

Definición

Una representación unitaria de un grupo discreto G en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un homomorfismo de grupos $u : G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$,

Definición

Una representación unitaria de un grupo discreto G en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un homomorfismo de grupos $u : G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$, donde $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ es el grupo de operadores unitarios de $\mathcal{H}$.

C^* -álgebras de grupos discretos.

Definición

Una representación unitaria de un grupo discreto G en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un homomorfismo de grupos $u : G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$, donde $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ es el grupo de operadores unitarios de $\mathcal{H}$.

Ejemplo

Sea G un grupo discreto, y sea $\ell^2(G) = L^2(G, \kappa)$, donde κ es la medida de conteo.

C^* -álgebras de grupos discretos.

Definición

Una representación unitaria de un grupo discreto G en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un homomorfismo de grupos $u : G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$, donde $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ es el grupo de operadores unitarios de $\mathcal{H}$.

Ejemplo

Sea G un grupo discreto, y sea $\ell^2(G) = L^2(G, \kappa)$, donde κ es la medida de conteo.

Definición

Una representación unitaria de un grupo discreto G en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un homomorfismo de grupos $u : G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$, donde $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ es el grupo de operadores unitarios de $\mathcal{H}$.

Ejemplo

Sea G un grupo discreto, y sea $\ell^2(G) = L^2(G, \kappa)$, donde κ es la medida de conteo. Es decir $\ell^2(G) = \{x : G \rightarrow \mathbb{C} : \sum_{t \in G} |x(t)|^2 < \infty\}$.

Definición

Una representación unitaria de un grupo discreto G en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un homomorfismo de grupos $u : G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$, donde $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ es el grupo de operadores unitarios de $\mathcal{H}$.

Ejemplo

Sea G un grupo discreto, y sea $\ell^2(G) = L^2(G, \kappa)$, donde κ es la medida de conteo. Es decir $\ell^2(G) = \{x : G \rightarrow \mathbb{C} : \sum_{t \in G} |x(t)|^2 < \infty\}$.

Sea $\lambda : G \rightarrow B(\ell^2(G))$ tal que $t \mapsto \lambda_t$,

C*-álgebras de grupos discretos.

Definición

Una representación unitaria de un grupo discreto G en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un homomorfismo de grupos $u : G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$, donde $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ es el grupo de operadores unitarios de $\mathcal{H}$.

Ejemplo

Sea G un grupo discreto, y sea $\ell^2(G) = L^2(G, \kappa)$, donde κ es la medida de conteo. Es decir $\ell^2(G) = \{x : G \rightarrow \mathbb{C} : \sum_{t \in G} |x(t)|^2 < \infty\}$.

Sea $\lambda : G \rightarrow B(\ell^2(G))$ tal que $t \mapsto \lambda_t$, donde $\lambda_t x(s) = x(t^{-1}s)$.

C*-álgebras de grupos discretos.

Definición

Una representación unitaria de un grupo discreto G en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un homomorfismo de grupos $u : G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$, donde $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ es el grupo de operadores unitarios de $\mathcal{H}$.

Ejemplo

Sea G un grupo discreto, y sea $\ell^2(G) = L^2(G, \kappa)$, donde κ es la medida de conteo. Es decir $\ell^2(G) = \{x : G \rightarrow \mathbb{C} : \sum_{t \in G} |x(t)|^2 < \infty\}$. Sea $\lambda : G \rightarrow \mathcal{B}(\ell^2(G))$ tal que $t \mapsto \lambda_t$, donde $\lambda_t x(s) = x(t^{-1}s)$. Entonces λ es una representación unitaria de G ,

Definición

Una representación unitaria de un grupo discreto G en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un homomorfismo de grupos $u : G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$, donde $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ es el grupo de operadores unitarios de $\mathcal{H}$.

Ejemplo

*Sea G un grupo discreto, y sea $\ell^2(G) = L^2(G, \kappa)$, donde κ es la medida de conteo. Es decir $\ell^2(G) = \{x : G \rightarrow \mathbb{C} : \sum_{t \in G} |x(t)|^2 < \infty\}$. Sea $\lambda : G \rightarrow \mathcal{B}(\ell^2(G))$ tal que $t \mapsto \lambda_t$, donde $\lambda_t x(s) = x(t^{-1}s)$. Entonces λ es una representación unitaria de G , llamada *representación regular izquierda* de G .*

C^* -álgebras de grupos discretos.

Definición

Una representación unitaria de un grupo discreto G en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un homomorfismo de grupos $u : G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$, donde $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ es el grupo de operadores unitarios de $\mathcal{H}$.

Ejemplo

Sea G un grupo discreto, y sea $\ell^2(G) = L^2(G, \kappa)$, donde κ es la medida de conteo. Es decir $\ell^2(G) = \{x : G \rightarrow \mathbb{C} : \sum_{t \in G} |x(t)|^2 < \infty\}$. Sea $\lambda : G \rightarrow \mathcal{B}(\ell^2(G))$ tal que $t \mapsto \lambda_t$, donde $\lambda_t x(s) = x(t^{-1}s)$. Entonces λ es una representación unitaria de G , llamada *representación regular izquierda* de G .

Sea $\mathbb{C}G := \{a : G \rightarrow \mathbb{C} \text{ tal que } a \text{ tiene soporte finito}\}$.

C^* -álgebras de grupos discretos.

Definición

Una representación unitaria de un grupo discreto G en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un homomorfismo de grupos $u : G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$, donde $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ es el grupo de operadores unitarios de $\mathcal{H}$.

Ejemplo

Sea G un grupo discreto, y sea $\ell^2(G) = L^2(G, \kappa)$, donde κ es la medida de conteo. Es decir $\ell^2(G) = \{x : G \rightarrow \mathbb{C} : \sum_{t \in G} |x(t)|^2 < \infty\}$. Sea $\lambda : G \rightarrow B(\ell^2(G))$ tal que $t \mapsto \lambda_t$, donde $\lambda_t x(s) = x(t^{-1}s)$. Entonces λ es una representación unitaria de G , llamada *representación regular izquierda* de G .

Sea $\mathbb{C}G := \{a : G \rightarrow \mathbb{C} \text{ tal que } a \text{ tiene soporte finito}\}$. El conjunto $\{\delta_t\}_{t \in G}$, donde $\delta_t(s) = \delta_{t,s}$, es una base para $\mathbb{C}G$.

C^* -álgebras de grupos discretos.

Definición

Una representación unitaria de un grupo discreto G en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un homomorfismo de grupos $u : G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$, donde $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ es el grupo de operadores unitarios de $\mathcal{H}$.

Ejemplo

*Sea G un grupo discreto, y sea $\ell^2(G) = L^2(G, \kappa)$, donde κ es la medida de conteo. Es decir $\ell^2(G) = \{x : G \rightarrow \mathbb{C} : \sum_{t \in G} |x(t)|^2 < \infty\}$. Sea $\lambda : G \rightarrow \mathcal{B}(\ell^2(G))$ tal que $t \mapsto \lambda_t$, donde $\lambda_t x(s) = x(t^{-1}s)$. Entonces λ es una representación unitaria de G , llamada *representación regular izquierda* de G .*

Sea $\mathbb{C}G := \{a : G \rightarrow \mathbb{C} \text{ tal que } a \text{ tiene soporte finito}\}$. El conjunto $\{\delta_t\}_{t \in G}$, donde $\delta_t(s) = \delta_{t,s}$, es una base para $\mathbb{C}G$. Entonces

C^* -álgebras de grupos discretos.

Definición

Una representación unitaria de un grupo discreto G en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un homomorfismo de grupos $u : G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$, donde $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ es el grupo de operadores unitarios de $\mathcal{H}$.

Ejemplo

Sea G un grupo discreto, y sea $\ell^2(G) = L^2(G, \kappa)$, donde κ es la medida de conteo. Es decir $\ell^2(G) = \{x : G \rightarrow \mathbb{C} : \sum_{t \in G} |x(t)|^2 < \infty\}$. Sea $\lambda : G \rightarrow B(\ell^2(G))$ tal que $t \mapsto \lambda_t$, donde $\lambda_t x(s) = x(t^{-1}s)$. Entonces λ es una representación unitaria de G , llamada *representación regular izquierda* de G .

Sea $\mathbb{C}G := \{a : G \rightarrow \mathbb{C} \text{ tal que } a \text{ tiene soporte finito}\}$. El conjunto $\{\delta_t\}_{t \in G}$, donde $\delta_t(s) = \delta_{t,s}$, es una base para $\mathbb{C}G$. Entonces

$$a = \sum_{t \in G} a(t) \delta_t, \quad \forall a \in \mathbb{C}G.$$

En $\mathbb{C}G$ se define un producto extendiendo por bilinealidad el producto de G :

En $\mathbb{C}G$ se define un producto extendiendo por bilinealidad el producto de G : si $a, b \in \mathbb{C}G$,

En $\mathbb{C}G$ se define un producto extendiendo por bilinealidad el producto de G : si $a, b \in \mathbb{C}G$, entonces su producto es $a * b$, la *convolución* de a y b ,

En $\mathbb{C}G$ se define un producto extendiendo por bilinealidad el producto de G : si $a, b \in \mathbb{C}G$, entonces su producto es $a * b$, la *convolución* de a y b , dado por

En $\mathbb{C}G$ se define un producto extendiendo por bilinealidad el producto de G : si $a, b \in \mathbb{C}G$, entonces su producto es $a * b$, la *convolución* de a y b , dado por

$$a * b(t) = \sum_{r,s \in G} a(r)b(s)\delta_{rs}(t)$$

En $\mathbb{C}G$ se define un producto extendiendo por bilinealidad el producto de G : si $a, b \in \mathbb{C}G$, entonces su producto es $a * b$, la *convolución* de a y b , dado por

$$a * b(t) = \sum_{r,s \in G} a(r)b(s)\delta_{rs}(t) = \sum_{\{r,s \in G: rs=t\}} a(r)b(s)$$

En $\mathbb{C}G$ se define un producto extendiendo por bilinealidad el producto de G : si $a, b \in \mathbb{C}G$, entonces su producto es $a * b$, la *convolución* de a y b , dado por

$$a * b(t) = \sum_{r,s \in G} a(r)b(s)\delta_{rs}(t) = \sum_{\{r,s \in G: rs=t\}} a(r)b(s) = \sum_{r \in G} a(r)b(r^{-1}t),$$

En $\mathbb{C}G$ se define un producto extendiendo por bilinealidad el producto de G : si $a, b \in \mathbb{C}G$, entonces su producto es $a * b$, la *convolución* de a y b , dado por

$$a * b(t) = \sum_{r,s \in G} a(r)b(s)\delta_{rs}(t) = \sum_{\{r,s \in G: rs=t\}} a(r)b(s) = \sum_{r \in G} a(r)b(r^{-1}t),$$

de manera que $a * b = \sum_{t \in G} \left(\sum_{r \in G} a(r)b(r^{-1}t) \right) \delta_t$.

En $\mathbb{C}G$ se define un producto extendiendo por bilinealidad el producto de G : si $a, b \in \mathbb{C}G$, entonces su producto es $a * b$, la *convolución* de a y b , dado por

$$a * b(t) = \sum_{r,s \in G} a(r)b(s)\delta_{rs}(t) = \sum_{\{r,s \in G: rs=t\}} a(r)b(s) = \sum_{r \in G} a(r)b(r^{-1}t),$$

de manera que $a * b = \sum_{t \in G} \left(\sum_{r \in G} a(r)b(r^{-1}t) \right) \delta_t$.
También se define en $\mathbb{C}G$ una involución,

En $\mathbb{C}G$ se define un producto extendiendo por bilinealidad el producto de G : si $a, b \in \mathbb{C}G$, entonces su producto es $a * b$, la *convolución* de a y b , dado por

$$a * b(t) = \sum_{r,s \in G} a(r)b(s)\delta_{rs}(t) = \sum_{\{r,s \in G: rs=t\}} a(r)b(s) = \sum_{r \in G} a(r)b(r^{-1}t),$$

de manera que $a * b = \sum_{t \in G} \left(\sum_{r \in G} a(r)b(r^{-1}t) \right) \delta_t$.

También se define en $\mathbb{C}G$ una involución, que extiende a la inversión del grupo por antilinealidad:

En $\mathbb{C}G$ se define un producto extendiendo por bilinealidad el producto de G : si $a, b \in \mathbb{C}G$, entonces su producto es $a * b$, la *convolución* de a y b , dado por

$$a * b(t) = \sum_{r,s \in G} a(r)b(s)\delta_{rs}(t) = \sum_{\{r,s \in G: rs=t\}} a(r)b(s) = \sum_{r \in G} a(r)b(r^{-1}t),$$

de manera que $a * b = \sum_{t \in G} \left(\sum_{r \in G} a(r)b(r^{-1}t) \right) \delta_t$.

También se define en $\mathbb{C}G$ una involución, que extiende a la inversión del grupo por antilinealidad: si $a = \sum_{t \in G} a(t)\delta_t \in \mathbb{C}G$, entonces

En $\mathbb{C}G$ se define un producto extendiendo por bilinealidad el producto de G : si $a, b \in \mathbb{C}G$, entonces su producto es $a * b$, la *convolución* de a y b , dado por

$$a * b(t) = \sum_{r,s \in G} a(r)b(s)\delta_{rs}(t) = \sum_{\{r,s \in G: rs=t\}} a(r)b(s) = \sum_{r \in G} a(r)b(r^{-1}t),$$

de manera que $a * b = \sum_{t \in G} \left(\sum_{r \in G} a(r)b(r^{-1}t) \right) \delta_t$.

También se define en $\mathbb{C}G$ una involución, que extiende a la inversión del grupo por antilinealidad: si $a = \sum_{t \in G} a(t)\delta_t \in \mathbb{C}G$, entonces

$$a^* = \sum_{t \in G} \overline{a(t)}\delta_{t^{-1}} = \sum_{t \in G} \overline{a(t^{-1})}\delta_t.$$

En $\mathbb{C}G$ se define un producto extendiendo por bilinealidad el producto de G : si $a, b \in \mathbb{C}G$, entonces su producto es $a * b$, la *convolución* de a y b , dado por

$$a * b(t) = \sum_{r,s \in G} a(r)b(s)\delta_{rs}(t) = \sum_{\{r,s \in G: rs=t\}} a(r)b(s) = \sum_{r \in G} a(r)b(r^{-1}t),$$

de manera que $a * b = \sum_{t \in G} \left(\sum_{r \in G} a(r)b(r^{-1}t) \right) \delta_t$.

También se define en $\mathbb{C}G$ una involución, que extiende a la inversión del grupo por antilinealidad: si $a = \sum_{t \in G} a(t)\delta_t \in \mathbb{C}G$, entonces

$$a^* = \sum_{t \in G} \overline{a(t)}\delta_{t^{-1}} = \sum_{t \in G} \overline{a(t^{-1})}\delta_t.$$

Es decir $a^*(t) = \overline{a(t^{-1})}$.

En $\mathbb{C}G$ se define un producto extendiendo por bilinealidad el producto de G : si $a, b \in \mathbb{C}G$, entonces su producto es $a * b$, la *convolución* de a y b , dado por

$$a * b(t) = \sum_{r,s \in G} a(r)b(s)\delta_{rs}(t) = \sum_{\{r,s \in G: rs=t\}} a(r)b(s) = \sum_{r \in G} a(r)b(r^{-1}t),$$

de manera que $a * b = \sum_{t \in G} \left(\sum_{r \in G} a(r)b(r^{-1}t) \right) \delta_t$.

También se define en $\mathbb{C}G$ una involución, que extiende a la inversión del grupo por antilinealidad: si $a = \sum_{t \in G} a(t)\delta_t \in \mathbb{C}G$, entonces

$$a^* = \sum_{t \in G} \overline{a(t)}\delta_{t^{-1}} = \sum_{t \in G} \overline{a(t^{-1})}\delta_t.$$

Es decir $a^*(t) = \overline{a(t^{-1})}$. Con estas operaciones $\mathbb{C}G$ se torna una $*$ -álgebra compleja, que además tiene unidad: δ_e .

Dada una representación unitaria $u : G \rightarrow B(\mathcal{H})$,

Dada una representación unitaria $u : G \rightarrow B(\mathcal{H})$, podemos extenderla por linealidad,

Dada una representación unitaria $u : G \rightarrow B(\mathcal{H})$, podemos extenderla por linealidad, obteniendo una representación $\pi_u : \mathbb{C}G \rightarrow B(\mathcal{H})$,

Dada una representación unitaria $u : G \rightarrow B(\mathcal{H})$, podemos extenderla por linealidad, obteniendo una representación $\pi_u : \mathbb{C}G \rightarrow B(\mathcal{H})$, no degenerada,

Dada una representación unitaria $u : G \rightarrow B(\mathcal{H})$, podemos extenderla por linealidad, obteniendo una representación $\pi_u : \mathbb{C}G \rightarrow B(\mathcal{H})$, no degenerada, tal que $\pi_u(a) = \sum_{t \in G} a(t)u_t$.

Dada una representación unitaria $u : G \rightarrow B(\mathcal{H})$, podemos extenderla por linealidad, obteniendo una representación $\pi_u : \mathbb{C}G \rightarrow B(\mathcal{H})$, no degenerada, tal que $\pi_u(a) = \sum_{t \in G} a(t)u_t$. Por lo tanto $\overline{\pi_u(\mathbb{C}G)}$ es una C^* -álgebra.

Dada una representación unitaria $u : G \rightarrow B(\mathcal{H})$, podemos extenderla por linealidad, obteniendo una representación $\pi_u : \mathbb{C}G \rightarrow B(\mathcal{H})$, no degenerada, tal que $\pi_u(a) = \sum_{t \in G} a(t)u_t$. Por lo tanto $\overline{\pi_u(\mathbb{C}G)}$ es una C^* -álgebra. Nótese que

Dada una representación unitaria $u : G \rightarrow B(\mathcal{H})$, podemos extenderla por linealidad, obteniendo una representación $\pi_u : \mathbb{C}G \rightarrow B(\mathcal{H})$, no degenerada, tal que $\pi_u(a) = \sum_{t \in G} a(t)u_t$. Por lo tanto $\overline{\pi_u(\mathbb{C}G)}$ es una C^* -álgebra. Nótese que

$$\|\pi_u(a)\| = \left\| \sum_{t \in G} a(t)u_t \right\|$$

Dada una representación unitaria $u : G \rightarrow B(\mathcal{H})$, podemos extenderla por linealidad, obteniendo una representación $\pi_u : \mathbb{C}G \rightarrow B(\mathcal{H})$, no degenerada, tal que $\pi_u(a) = \sum_{t \in G} a(t)u_t$. Por lo tanto $\overline{\pi_u(\mathbb{C}G)}$ es una C^* -álgebra. Nótese que

$$\|\pi_u(a)\| = \left\| \sum_{t \in G} a(t)u_t \right\| \leq \sum_{t \in G} |a(t)| \|u_t\|$$

Dada una representación unitaria $u : G \rightarrow B(\mathcal{H})$, podemos extenderla por linealidad, obteniendo una representación $\pi_u : \mathbb{C}G \rightarrow B(\mathcal{H})$, no degenerada, tal que $\pi_u(a) = \sum_{t \in G} a(t)u_t$. Por lo tanto $\overline{\pi_u(\mathbb{C}G)}$ es una C^* -álgebra. Nótese que

$$\|\pi_u(a)\| = \left\| \sum_{t \in G} a(t)u_t \right\| \leq \sum_{t \in G} |a(t)| \|u_t\| = \sum_{t \in G} |a(t)| = \|a\|_1,$$

Dada una representación unitaria $u : G \rightarrow B(\mathcal{H})$, podemos extenderla por linealidad, obteniendo una representación $\pi_u : \mathbb{C}G \rightarrow B(\mathcal{H})$, no degenerada, tal que $\pi_u(a) = \sum_{t \in G} a(t)u_t$. Por lo tanto $\overline{\pi_u(\mathbb{C}G)}$ es una C^* -álgebra. Nótese que

$$\|\pi_u(a)\| = \left\| \sum_{t \in G} a(t)u_t \right\| \leq \sum_{t \in G} |a(t)| \|u_t\| = \sum_{t \in G} |a(t)| = \|a\|_1,$$

de modo que π_u se extiende por continuidad a una representación $\pi_u : \ell^1(G) \rightarrow B(\mathcal{H})$,

Dada una representación unitaria $u : G \rightarrow B(\mathcal{H})$, podemos extenderla por linealidad, obteniendo una representación $\pi_u : \mathbb{C}G \rightarrow B(\mathcal{H})$, no degenerada, tal que $\pi_u(a) = \sum_{t \in G} a(t)u_t$. Por lo tanto $\overline{\pi_u(\mathbb{C}G)}$ es una C^* -álgebra. Nótese que

$$\|\pi_u(a)\| = \left\| \sum_{t \in G} a(t)u_t \right\| \leq \sum_{t \in G} |a(t)| \|u_t\| = \sum_{t \in G} |a(t)| = \|a\|_1,$$

de modo que π_u se extiende por continuidad a una representación $\pi_u : \ell^1(G) \rightarrow B(\mathcal{H})$, la clausura de cuya imagen es $\overline{\pi_u(\mathbb{C}G)}$.

Dada una representación unitaria $u : G \rightarrow B(\mathcal{H})$, podemos extenderla por linealidad, obteniendo una representación $\pi_u : \mathbb{C}G \rightarrow B(\mathcal{H})$, no degenerada, tal que $\pi_u(a) = \sum_{t \in G} a(t)u_t$. Por lo tanto $\overline{\pi_u(\mathbb{C}G)}$ es una C^* -álgebra. Nótese que

$$\|\pi_u(a)\| = \left\| \sum_{t \in G} a(t)u_t \right\| \leq \sum_{t \in G} |a(t)| \|u_t\| = \sum_{t \in G} |a(t)| = \|a\|_1,$$

de modo que π_u se extiende por continuidad a una representación $\pi_u : \ell^1(G) \rightarrow B(\mathcal{H})$, la clausura de cuya imagen es $\overline{\pi_u(\mathbb{C}G)}$.

En el caso de la representación regular se ve sin dificultad que es $\lambda(a)x = a * x$ para todo $a \in \ell^1(G)$, $x \in \ell^2(G)$.

Dada una representación unitaria $u : G \rightarrow B(\mathcal{H})$, podemos extenderla por linealidad, obteniendo una representación $\pi_u : \mathbb{C}G \rightarrow B(\mathcal{H})$, no degenerada, tal que $\pi_u(a) = \sum_{t \in G} a(t)u_t$. Por lo tanto $\overline{\pi_u(\mathbb{C}G)}$ es una C^* -álgebra. Nótese que

$$\|\pi_u(a)\| = \left\| \sum_{t \in G} a(t)u_t \right\| \leq \sum_{t \in G} |a(t)| \|u_t\| = \sum_{t \in G} |a(t)| = \|a\|_1,$$

de modo que π_u se extiende por continuidad a una representación $\pi_u : \ell^1(G) \rightarrow B(\mathcal{H})$, la clausura de cuya imagen es $\overline{\pi_u(\mathbb{C}G)}$.

En el caso de la representación regular se ve sin dificultad que es $\lambda(a)x = a * x$ para todo $a \in \ell^1(G)$, $x \in \ell^2(G)$. Si $\lambda(a) = 0$, entonces $\lambda(a)x = 0$ para todo $x \in \ell^2(G)$.

Dada una representación unitaria $u : G \rightarrow B(\mathcal{H})$, podemos extenderla por linealidad, obteniendo una representación $\pi_u : \mathbb{C}G \rightarrow B(\mathcal{H})$, no degenerada, tal que $\pi_u(a) = \sum_{t \in G} a(t)u_t$. Por lo tanto $\overline{\pi_u(\mathbb{C}G)}$ es una C^* -álgebra. Nótese que

$$\|\pi_u(a)\| = \left\| \sum_{t \in G} a(t)u_t \right\| \leq \sum_{t \in G} |a(t)| \|u_t\| = \sum_{t \in G} |a(t)| = \|a\|_1,$$

de modo que π_u se extiende por continuidad a una representación $\pi_u : \ell^1(G) \rightarrow B(\mathcal{H})$, la clausura de cuya imagen es $\overline{\pi_u(\mathbb{C}G)}$.

En el caso de la representación regular se ve sin dificultad que es $\lambda(a)x = a * x$ para todo $a \in \ell^1(G)$, $x \in \ell^2(G)$. Si $\lambda(a) = 0$, entonces $\lambda(a)x = 0$ para todo $x \in \ell^2(G)$. En particular $0 = \lambda(a)\delta_e = a * \delta_e = a$, de donde sigue que λ es inyectivo.

Dada una representación unitaria $u : G \rightarrow B(\mathcal{H})$, podemos extenderla por linealidad, obteniendo una representación $\pi_u : \mathbb{C}G \rightarrow B(\mathcal{H})$, no degenerada, tal que $\pi_u(a) = \sum_{t \in G} a(t)u_t$. Por lo tanto $\overline{\pi_u(\mathbb{C}G)}$ es una C^* -álgebra. Nótese que

$$\|\pi_u(a)\| = \left\| \sum_{t \in G} a(t)u_t \right\| \leq \sum_{t \in G} |a(t)| \|u_t\| = \sum_{t \in G} |a(t)| = \|a\|_1,$$

de modo que π_u se extiende por continuidad a una representación $\pi_u : \ell^1(G) \rightarrow B(\mathcal{H})$, la clausura de cuya imagen es $\overline{\pi_u(\mathbb{C}G)}$.

En el caso de la representación regular se ve sin dificultad que es $\lambda(a)x = a * x$ para todo $a \in \ell^1(G)$, $x \in \ell^2(G)$. Si $\lambda(a) = 0$, entonces $\lambda(a)x = 0$ para todo $x \in \ell^2(G)$. En particular $0 = \lambda(a)\delta_e = a * \delta_e = a$, de donde sigue que λ es inyectivo. Conclusión: $\lambda : \ell^1(G) \rightarrow B(\ell^2(G))$ es un $*$ -homomorfismo inyectivo de $*$ -álgebras.

Dada una representación unitaria $u : G \rightarrow B(\mathcal{H})$, podemos extenderla por linealidad, obteniendo una representación $\pi_u : \mathbb{C}G \rightarrow B(\mathcal{H})$, no degenerada, tal que $\pi_u(a) = \sum_{t \in G} a(t)u_t$. Por lo tanto $\overline{\pi_u(\mathbb{C}G)}$ es una C^* -álgebra. Nótese que

$$\|\pi_u(a)\| = \left\| \sum_{t \in G} a(t)u_t \right\| \leq \sum_{t \in G} |a(t)| \|u_t\| = \sum_{t \in G} |a(t)| = \|a\|_1,$$

de modo que π_u se extiende por continuidad a una representación $\pi_u : \ell^1(G) \rightarrow B(\mathcal{H})$, la clausura de cuya imagen es $\overline{\pi_u(\mathbb{C}G)}$.

En el caso de la representación regular se ve sin dificultad que es $\lambda(a)x = a * x$ para todo $a \in \ell^1(G)$, $x \in \ell^2(G)$. Si $\lambda(a) = 0$, entonces $\lambda(a)x = 0$ para todo $x \in \ell^2(G)$. En particular $0 = \lambda(a)\delta_e = a * \delta_e = a$, de donde sigue que λ es inyectivo. Conclusión: $\lambda : \ell^1(G) \rightarrow B(\ell^2(G))$ es un $*$ -homomorfismo inyectivo de $*$ -álgebras.

Definición

Si G es un grupo discreto, la C^ -álgebra reducida de G es*

$$C_r^*(G) := \overline{\lambda(\mathbb{C}G)}$$

Dada una representación unitaria $u : G \rightarrow B(\mathcal{H})$, podemos extenderla por linealidad, obteniendo una representación $\pi_u : \mathbb{C}G \rightarrow B(\mathcal{H})$, no degenerada, tal que $\pi_u(a) = \sum_{t \in G} a(t)u_t$. Por lo tanto $\overline{\pi_u(\mathbb{C}G)}$ es una C^* -álgebra. Nótese que

$$\|\pi_u(a)\| = \left\| \sum_{t \in G} a(t)u_t \right\| \leq \sum_{t \in G} |a(t)| \|u_t\| = \sum_{t \in G} |a(t)| = \|a\|_1,$$

de modo que π_u se extiende por continuidad a una representación $\pi_u : \ell^1(G) \rightarrow B(\mathcal{H})$, la clausura de cuya imagen es $\overline{\pi_u(\mathbb{C}G)}$.

En el caso de la representación regular se ve sin dificultad que es $\lambda(a)x = a * x$ para todo $a \in \ell^1(G)$, $x \in \ell^2(G)$. Si $\lambda(a) = 0$, entonces $\lambda(a)x = 0$ para todo $x \in \ell^2(G)$. En particular $0 = \lambda(a)\delta_e = a * \delta_e = a$, de donde sigue que λ es inyectivo. Conclusión: $\lambda : \ell^1(G) \rightarrow B(\ell^2(G))$ es un $*$ -homomorfismo inyectivo de $*$ -álgebras.

Definición

Si G es un grupo discreto, la C^ -álgebra reducida de G es*

$$C_r^*(G) := \overline{\lambda(\mathbb{C}G)}$$

Dada una representación unitaria $u : G \rightarrow B(\mathcal{H})$, podemos extenderla por linealidad, obteniendo una representación $\pi_u : \mathbb{C}G \rightarrow B(\mathcal{H})$, no degenerada, tal que $\pi_u(a) = \sum_{t \in G} a(t)u_t$. Por lo tanto $\overline{\pi_u(\mathbb{C}G)}$ es una C^* -álgebra. Nótese que

$$\|\pi_u(a)\| = \left\| \sum_{t \in G} a(t)u_t \right\| \leq \sum_{t \in G} |a(t)| \|u_t\| = \sum_{t \in G} |a(t)| = \|a\|_1,$$

de modo que π_u se extiende por continuidad a una representación $\pi_u : \ell^1(G) \rightarrow B(\mathcal{H})$, la clausura de cuya imagen es $\overline{\pi_u(\mathbb{C}G)}$.

En el caso de la representación regular se ve sin dificultad que es $\lambda(a)x = a * x$ para todo $a \in \ell^1(G)$, $x \in \ell^2(G)$. Si $\lambda(a) = 0$, entonces $\lambda(a)x = 0$ para todo $x \in \ell^2(G)$. En particular $0 = \lambda(a)\delta_e = a * \delta_e = a$, de donde sigue que λ es inyectivo. Conclusión: $\lambda : \ell^1(G) \rightarrow B(\ell^2(G))$ es un $*$ -homomorfismo inyectivo de $*$ -álgebras.

Definición

Si G es un grupo discreto, la C^ -álgebra reducida de G es*

$$C_r^*(G) := \overline{\lambda(\mathbb{C}G)} = \overline{\lambda(\ell^1(G))}$$

Dada una representación unitaria $u : G \rightarrow B(\mathcal{H})$, podemos extenderla por linealidad, obteniendo una representación $\pi_u : \mathbb{C}G \rightarrow B(\mathcal{H})$, no degenerada, tal que $\pi_u(a) = \sum_{t \in G} a(t)u_t$. Por lo tanto $\overline{\pi_u(\mathbb{C}G)}$ es una C^* -álgebra. Nótese que

$$\|\pi_u(a)\| = \left\| \sum_{t \in G} a(t)u_t \right\| \leq \sum_{t \in G} |a(t)| \|u_t\| = \sum_{t \in G} |a(t)| = \|a\|_1,$$

de modo que π_u se extiende por continuidad a una representación $\pi_u : \ell^1(G) \rightarrow B(\mathcal{H})$, la clausura de cuya imagen es $\overline{\pi_u(\mathbb{C}G)}$.

En el caso de la representación regular se ve sin dificultad que es $\lambda(a)x = a * x$ para todo $a \in \ell^1(G)$, $x \in \ell^2(G)$. Si $\lambda(a) = 0$, entonces $\lambda(a)x = 0$ para todo $x \in \ell^2(G)$. En particular $0 = \lambda(a)\delta_e = a * \delta_e = a$, de donde sigue que λ es inyectivo. Conclusión: $\lambda : \ell^1(G) \rightarrow B(\ell^2(G))$ es un $*$ -homomorfismo inyectivo de $*$ -álgebras.

Definición

Si G es un grupo discreto, la C^ -álgebra reducida de G es*

$$C_r^*(G) := \overline{\lambda(\mathbb{C}G)} = \overline{\lambda(\ell^1(G))} \subseteq B(\ell^2(G)).$$

Dada una representación unitaria $u : G \rightarrow B(\mathcal{H})$, podemos extenderla por linealidad, obteniendo una representación $\pi_u : \mathbb{C}G \rightarrow B(\mathcal{H})$, no degenerada, tal que $\pi_u(a) = \sum_{t \in G} a(t)u_t$. Por lo tanto $\overline{\pi_u(\mathbb{C}G)}$ es una C^* -álgebra. Nótese que

$$\|\pi_u(a)\| = \left\| \sum_{t \in G} a(t)u_t \right\| \leq \sum_{t \in G} |a(t)| \|u_t\| = \sum_{t \in G} |a(t)| = \|a\|_1,$$

de modo que π_u se extiende por continuidad a una representación $\pi_u : \ell^1(G) \rightarrow B(\mathcal{H})$, la clausura de cuya imagen es $\overline{\pi_u(\mathbb{C}G)}$.

En el caso de la representación regular se ve sin dificultad que es $\lambda(a)x = a * x$ para todo $a \in \ell^1(G)$, $x \in \ell^2(G)$. Si $\lambda(a) = 0$, entonces $\lambda(a)x = 0$ para todo $x \in \ell^2(G)$. En particular $0 = \lambda(a)\delta_e = a * \delta_e = a$, de donde sigue que λ es inyectivo. Conclusión: $\lambda : \ell^1(G) \rightarrow B(\ell^2(G))$ es un $*$ -homomorfismo inyectivo de $*$ -álgebras.

Definición

Si G es un grupo discreto, la C^ -álgebra reducida de G es*

$$C_r^*(G) := \overline{\lambda(\mathbb{C}G)} = \overline{\lambda(\ell^1(G))} \subseteq B(\ell^2(G)).$$

Dado $a \in \ell^1(G)$, sea

Dado $a \in \ell^1(G)$, sea

$$\|a\|_\mu$$

Dado $a \in \ell^1(G)$, sea

$$\|a\|_\mu := \sup\{\|\pi_u(a)\| : u \text{ es una representación unitaria de } G\}.$$

Dado $a \in \ell^1(G)$, sea

$$\|a\|_\mu := \sup\{\|\pi_u(a)\| : u \text{ es una representación unitaria de } G\}.$$

Entonces $\|a\|_r \leq \|a\|_\mu \leq \|a\|_1, \forall a \in \ell^1(G)$.

Dado $a \in \ell^1(G)$, sea

$$\|a\|_\mu := \sup\{\|\pi_u(a)\| : u \text{ es una representación unitaria de } G\}.$$

Entonces $\|a\|_r \leq \|a\|_\mu \leq \|a\|_1$, $\forall a \in \ell^1(G)$. En particular $\|\cdot\|_\mu$ es una C^* -norma en $\ell^1(G)$.

Dado $a \in \ell^1(G)$, sea

$$\|a\|_\mu := \sup\{\|\pi_u(a)\| : u \text{ es una representación unitaria de } G\}.$$

Entonces $\|a\|_r \leq \|a\|_\mu \leq \|a\|_1$, $\forall a \in \ell^1(G)$. En particular $\|\cdot\|_\mu$ es una C^* -norma en $\ell^1(G)$.

Definición

Si G es un grupo discreto, la C^ -álgebra plena de G es $C^*(G)$,*

Dado $a \in \ell^1(G)$, sea

$$\|a\|_\mu := \sup\{\|\pi_u(a)\| : u \text{ es una representación unitaria de } G\}.$$

Entonces $\|a\|_r \leq \|a\|_\mu \leq \|a\|_1$, $\forall a \in \ell^1(G)$. En particular $\|\cdot\|_\mu$ es una C^* -norma en $\ell^1(G)$.

Definición

Si G es un grupo discreto, la C^ -álgebra plena de G es $C^*(G)$,*

Dado $a \in \ell^1(G)$, sea

$$\|a\|_\mu := \sup\{\|\pi_u(a)\| : u \text{ es una representación unitaria de } G\}.$$

Entonces $\|a\|_r \leq \|a\|_\mu \leq \|a\|_1$, $\forall a \in \ell^1(G)$. En particular $\|\cdot\|_\mu$ es una C^* -norma en $\ell^1(G)$.

Definición

Si G es un grupo discreto, la C^ -álgebra plena de G es $C^*(G)$, la completación de $\ell^1(G)$ con respecto a $\|\cdot\|_\mu$.*

Dado $a \in \ell^1(G)$, sea

$$\|a\|_\mu := \sup\{\|\pi_u(a)\| : u \text{ es una representación unitaria de } G\}.$$

Entonces $\|a\|_r \leq \|a\|_\mu \leq \|a\|_1$, $\forall a \in \ell^1(G)$. En particular $\|\cdot\|_\mu$ es una C^* -norma en $\ell^1(G)$.

Definición

Si G es un grupo discreto, la C^ -álgebra plena de G es $C^*(G)$, la completación de $\ell^1(G)$ con respecto a $\|\cdot\|_\mu$.*

Nótese que $u \mapsto \pi_u$ es una biyección entre las representaciones unitarias de G y las representaciones no degeneradas de $C^*(G)$;

Dado $a \in \ell^1(G)$, sea

$$\|a\|_\mu := \sup\{\|\pi_u(a)\| : u \text{ es una representación unitaria de } G\}.$$

Entonces $\|a\|_r \leq \|a\|_\mu \leq \|a\|_1$, $\forall a \in \ell^1(G)$. En particular $\|\cdot\|_\mu$ es una C^* -norma en $\ell^1(G)$.

Definición

Si G es un grupo discreto, la C^ -álgebra plena de G es $C^*(G)$, la completación de $\ell^1(G)$ con respecto a $\|\cdot\|_\mu$.*

Nótese que $u \mapsto \pi_u$ es una biyección entre las representaciones unitarias de G y las representaciones no degeneradas de $C^*(G)$; la inversa está dada por $\pi \mapsto u_\pi$, tal que $u_\pi(t) := \pi(\delta_t)$.

Dado $a \in \ell^1(G)$, sea

$$\|a\|_\mu := \sup\{\|\pi_u(a)\| : u \text{ es una representación unitaria de } G\}.$$

Entonces $\|a\|_r \leq \|a\|_\mu \leq \|a\|_1, \forall a \in \ell^1(G)$. En particular $\|\cdot\|_\mu$ es una C^* -norma en $\ell^1(G)$.

Definición

Si G es un grupo discreto, la C^ -álgebra plena de G es $C^*(G)$, la completación de $\ell^1(G)$ con respecto a $\|\cdot\|_\mu$.*

Nótese que $u \mapsto \pi_u$ es una biyección entre las representaciones unitarias de G y las representaciones no degeneradas de $C^*(G)$; la inversa está dada por $\pi \mapsto u_\pi$, tal que $u_\pi(t) := \pi(\delta_t)$.

Como $\|\cdot\|_r \leq \|\cdot\|_\mu$,

Dado $a \in \ell^1(G)$, sea

$$\|a\|_\mu := \sup\{\|\pi_u(a)\| : u \text{ es una representación unitaria de } G\}.$$

Entonces $\|a\|_r \leq \|a\|_\mu \leq \|a\|_1, \forall a \in \ell^1(G)$. En particular $\|\cdot\|_\mu$ es una C^* -norma en $\ell^1(G)$.

Definición

Si G es un grupo discreto, la C^ -álgebra plena de G es $C^*(G)$, la completación de $\ell^1(G)$ con respecto a $\|\cdot\|_\mu$.*

Nótese que $u \mapsto \pi_u$ es una biyección entre las representaciones unitarias de G y las representaciones no degeneradas de $C^*(G)$; la inversa está dada por $\pi \mapsto u_\pi$, tal que $u_\pi(t) := \pi(\delta_t)$.

Como $\|\cdot\|_r \leq \|\cdot\|_\mu$, el mapa identidad $id : \mathbb{C}G \rightarrow \mathbb{C}G$ se extiende por continuidad a un homomorfismo sobreyectivo $C^*(G) \rightarrow C_r^*(G)$ (también es denotado por λ),

Dado $a \in \ell^1(G)$, sea

$$\|a\|_\mu := \sup\{\|\pi_u(a)\| : u \text{ es una representación unitaria de } G\}.$$

Entonces $\|a\|_r \leq \|a\|_\mu \leq \|a\|_1, \forall a \in \ell^1(G)$. En particular $\|\cdot\|_\mu$ es una C^* -norma en $\ell^1(G)$.

Definición

Si G es un grupo discreto, la C^ -álgebra plena de G es $C^*(G)$, la completación de $\ell^1(G)$ con respecto a $\|\cdot\|_\mu$.*

Nótese que $u \mapsto \pi_u$ es una biyección entre las representaciones unitarias de G y las representaciones no degeneradas de $C^*(G)$; la inversa está dada por $\pi \mapsto u_\pi$, tal que $u_\pi(t) := \pi(\delta_t)$.

Como $\|\cdot\|_r \leq \|\cdot\|_\mu$, el mapa identidad $id : \mathbb{C}G \rightarrow \mathbb{C}G$ se extiende por continuidad a un homomorfismo sobreyectivo $C^*(G) \rightarrow C_r^*(G)$ (también es denotado por λ), y por lo tanto $C_r^*(G)$ es un cociente de $C^*(G)$.

Dado $a \in \ell^1(G)$, sea

$$\|a\|_\mu := \sup\{\|\pi_u(a)\| : u \text{ es una representación unitaria de } G\}.$$

Entonces $\|a\|_r \leq \|a\|_\mu \leq \|a\|_1, \forall a \in \ell^1(G)$. En particular $\|\cdot\|_\mu$ es una C^* -norma en $\ell^1(G)$.

Definición

Si G es un grupo discreto, la C^ -álgebra plena de G es $C^*(G)$, la completación de $\ell^1(G)$ con respecto a $\|\cdot\|_\mu$.*

Nótese que $u \mapsto \pi_u$ es una biyección entre las representaciones unitarias de G y las representaciones no degeneradas de $C^*(G)$; la inversa está dada por $\pi \mapsto u_\pi$, tal que $u_\pi(t) := \pi(\delta_t)$.

Como $\|\cdot\|_r \leq \|\cdot\|_\mu$, el mapa identidad $id : \mathbb{C}G \rightarrow \mathbb{C}G$ se extiende por continuidad a un homomorfismo sobreyectivo $C^*(G) \rightarrow C_r^*(G)$ (también es denotado por λ), y por lo tanto $C_r^*(G)$ es un cociente de $C^*(G)$.

En general $C^*(G)$ y $C_r^*(G)$ pueden ser objetos muy diferentes.

En general $C^*(G)$ y $C_r^*(G)$ pueden ser objetos muy diferentes. Por ejemplo, se puede probar que $C_r^*(\mathbb{F}_2)$ es simple (no tiene ideales no triviales).

En general $C^*(G)$ y $C_r^*(G)$ pueden ser objetos muy diferentes. Por ejemplo, se puede probar que $C_r^*(\mathbb{F}_2)$ es simple (no tiene ideales no triviales). Mientras tanto $C^*(\mathbb{F}_2)$ está lleno de ideales no triviales.

En general $C^*(G)$ y $C_r^*(G)$ pueden ser objetos muy diferentes. Por ejemplo, se puede probar que $C_r^*(\mathbb{F}_2)$ es simple (no tiene ideales no triviales). Mientras tanto $C^*(\mathbb{F}_2)$ está lleno de ideales no triviales. En efecto, como $\mathbb{F}_2$ es el grupo libre en dos generadores g_1 y g_2 ,

En general $C^*(G)$ y $C_r^*(G)$ pueden ser objetos muy diferentes. Por ejemplo, se puede probar que $C_r^*(\mathbb{F}_2)$ es simple (no tiene ideales no triviales). Mientras tanto $C^*(\mathbb{F}_2)$ está lleno de ideales no triviales. En efecto, como $\mathbb{F}_2$ es el grupo libre en dos generadores g_1 y g_2 , dar una representación u de $\mathbb{F}_2$ en $\mathcal{H}$ equivale a dar un par de operadores unitarios $U_1, U_2 \in B(\mathcal{H})$ y establecer $u(g_i) := U_i$.

En general $C^*(G)$ y $C_r^*(G)$ pueden ser objetos muy diferentes. Por ejemplo, se puede probar que $C_r^*(\mathbb{F}_2)$ es simple (no tiene ideales no triviales). Mientras tanto $C^*(\mathbb{F}_2)$ está lleno de ideales no triviales. En efecto, como $\mathbb{F}_2$ es el grupo libre en dos generadores g_1 y g_2 , dar una representación u de $\mathbb{F}_2$ en $\mathcal{H}$ equivale a dar un par de operadores unitarios $U_1, U_2 \in B(\mathcal{H})$ y establecer $u(g_i) := U_i$. Por ejemplo para cada n podemos tomar la matriz, digamos V_n ,

En general $C^*(G)$ y $C_r^*(G)$ pueden ser objetos muy diferentes. Por ejemplo, se puede probar que $C_r^*(\mathbb{F}_2)$ es simple (no tiene ideales no triviales). Mientras tanto $C^*(\mathbb{F}_2)$ está lleno de ideales no triviales. En efecto, como $\mathbb{F}_2$ es el grupo libre en dos generadores g_1 y g_2 , dar una representación u de $\mathbb{F}_2$ en $\mathcal{H}$ equivale a dar un par de operadores unitarios $U_1, U_2 \in B(\mathcal{H})$ y establecer $u(g_i) := U_i$. Por ejemplo para cada n podemos tomar la matriz, digamos V_n , asociada a la permutación $e_i \mapsto e_{i+1}$ si $i < n$, $e_n \mapsto e_1$:

En general $C^*(G)$ y $C_r^*(G)$ pueden ser objetos muy diferentes. Por ejemplo, se puede probar que $C_r^*(\mathbb{F}_2)$ es simple (no tiene ideales no triviales). Mientras tanto $C^*(\mathbb{F}_2)$ está lleno de ideales no triviales. En efecto, como $\mathbb{F}_2$ es el grupo libre en dos generadores g_1 y g_2 , dar una representación u de $\mathbb{F}_2$ en $\mathcal{H}$ equivale a dar un par de operadores unitarios $U_1, U_2 \in B(\mathcal{H})$ y establecer $u(g_i) := U_i$. Por ejemplo para cada n podemos tomar la matriz, digamos V_n , asociada a la permutación $e_i \mapsto e_{i+1}$ si $i < n$, $e_n \mapsto e_1$:

$$\begin{pmatrix} 0 & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \ddots & \ddots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

En general $C^*(G)$ y $C_r^*(G)$ pueden ser objetos muy diferentes. Por ejemplo, se puede probar que $C_r^*(\mathbb{F}_2)$ es simple (no tiene ideales no triviales). Mientras tanto $C^*(\mathbb{F}_2)$ está lleno de ideales no triviales. En efecto, como $\mathbb{F}_2$ es el grupo libre en dos generadores g_1 y g_2 , dar una representación u de $\mathbb{F}_2$ en $\mathcal{H}$ equivale a dar un par de operadores unitarios $U_1, U_2 \in B(\mathcal{H})$ y establecer $u(g_i) := U_i$. Por ejemplo para cada n podemos tomar la matriz, digamos V_n , asociada a la permutación $e_i \mapsto e_{i+1}$ si $i < n$, $e_n \mapsto e_1$:

$$\begin{pmatrix} 0 & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \ddots & \ddots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y definir: $u^{(n)}(g_1) = Id_n$, $u^{(n)}(g_2) = V_n$.

En general $C^*(G)$ y $C_r^*(G)$ pueden ser objetos muy diferentes. Por ejemplo, se puede probar que $C_r^*(\mathbb{F}_2)$ es simple (no tiene ideales no triviales). Mientras tanto $C^*(\mathbb{F}_2)$ está lleno de ideales no triviales. En efecto, como $\mathbb{F}_2$ es el grupo libre en dos generadores g_1 y g_2 , dar una representación u de $\mathbb{F}_2$ en $\mathcal{H}$ equivale a dar un par de operadores unitarios $U_1, U_2 \in B(\mathcal{H})$ y establecer $u(g_i) := U_i$. Por ejemplo para cada n podemos tomar la matriz, digamos V_n , asociada a la permutación $e_i \mapsto e_{i+1}$ si $i < n$, $e_n \mapsto e_1$:

$$\begin{pmatrix} 0 & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \ddots & \ddots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y definir: $u^{(n)}(g_1) = Id_n$, $u^{(n)}(g_2) = V_n$.

Entonces $\pi_{u(n)}(C^*(\mathbb{F}_2)) = \sum_{j=1}^n \mathbb{C}V_n^j$,

Entonces $\pi_{\mathcal{U}(n)}(C^*(\mathbb{F}_2)) = \sum_{j=1}^n \mathbb{C}V_n^j$, que tiene dimensión n porque $\{V_n^1, \dots, V_n^n\}$ es l.i.

Entonces $\pi_{u(n)}(C^*(\mathbb{F}_2)) = \sum_{j=1}^n \mathbb{C}V_n^j$, que tiene dimensión n porque $\{V_n^1, \dots, V_n^n\}$ es l.i. Luego $\ker \pi_{u(n)} \neq \ker \pi_{u(m)}$ si $n \neq m$.

Entonces $\pi_{u(n)}(C^*(\mathbb{F}_2)) = \sum_{j=1}^n \mathbb{C}V_n^j$, que tiene dimensión n porque $\{V_n^1, \dots, V_n^n\}$ es l.i. Luego $\ker \pi_{u(n)} \neq \ker \pi_{u(m)}$ si $n \neq m$.

El homomorfismo λ en general no es inyectivo.

Entonces $\pi_{u(n)}(C^*(\mathbb{F}_2)) = \sum_{j=1}^n \mathbb{C}V_n^j$, que tiene dimensión n porque $\{V_n^1, \dots, V_n^n\}$ es l.i. Luego $\ker \pi_{u(n)} \neq \ker \pi_{u(m)}$ si $n \neq m$.

El homomorfismo λ en general no es inyectivo. Cuando sí lo es,

Entonces $\pi_{u(n)}(C^*(\mathbb{F}_2)) = \sum_{j=1}^n \mathbb{C}V_n^j$, que tiene dimensión n porque $\{V_n^1, \dots, V_n^n\}$ es l.i. Luego $\ker \pi_{u(n)} \neq \ker \pi_{u(m)}$ si $n \neq m$.

El homomorfismo λ en general no es inyectivo. Cuando sí lo es, y por lo tanto $C^*(G) = C_r^*(G)$,

Entonces $\pi_{u(n)}(C^*(\mathbb{F}_2)) = \sum_{j=1}^n \mathbb{C}V_n^j$, que tiene dimensión n porque $\{V_n^1, \dots, V_n^n\}$ es l.i. Luego $\ker \pi_{u(n)} \neq \ker \pi_{u(m)}$ si $n \neq m$.

El homomorfismo λ en general no es inyectivo. Cuando sí lo es, y por lo tanto $C^*(G) = C_r^*(G)$, se dice que el grupo G es *promediable* (‘‘*amenable*’’).

Entonces $\pi_{u(n)}(C^*(\mathbb{F}_2)) = \sum_{j=1}^n \mathbb{C}V_n^j$, que tiene dimensión n porque $\{V_n^1, \dots, V_n^n\}$ es l.i. Luego $\ker \pi_{u(n)} \neq \ker \pi_{u(m)}$ si $n \neq m$.

El homomorfismo λ en general no es inyectivo. Cuando sí lo es, y por lo tanto $C^*(G) = C_r^*(G)$, se dice que el grupo G es *promediable* (‘‘*amenable*’’). Los grupos compactos y los abelianos son ejemplos de grupos promediables.

Entonces $\pi_{u(n)}(C^*(\mathbb{F}_2)) = \sum_{j=1}^n \mathbb{C}V_n^j$, que tiene dimensión n porque $\{V_n^1, \dots, V_n^n\}$ es l.i. Luego $\ker \pi_{u(n)} \neq \ker \pi_{u(m)}$ si $n \neq m$.

El homomorfismo λ en general no es inyectivo. Cuando sí lo es, y por lo tanto $C^*(G) = C_r^*(G)$, se dice que el grupo G es *promediable* (‘‘*amenable*’’). Los grupos compactos y los abelianos son ejemplos de grupos promediables. Y el ejemplo que acabamos de ver muestra que $\mathbb{F}_2$ no es promediable.

Funcionales positivas I

Funcionales positivas I

Definición

Sean A una C^ -álgebra y $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ lineal.*

Funcionales positivas I

Definición

Sean A una C^ -álgebra y $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ lineal.*

Funcionales positivas I

Definición

Sean A una C^ -álgebra y $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ lineal. Se dice que φ es positiva si $\varphi(a^*a) \geq 0$, para todo $a \in A$.*

Funcionales positivas I

Definición

Sean A una C^ -álgebra y $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ lineal. Se dice que φ es positiva si $\varphi(a^*a) \geq 0$, para todo $a \in A$.*

Ejemplos

Funcionales positivas I

Definición

Sean A una C^* -álgebra y $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ lineal. Se dice que φ es positiva si $\varphi(a^*a) \geq 0$, para todo $a \in A$.

Ejemplos

(1) Si $\pi : A \rightarrow \mathbb{C}$ es un homomorfismo de C^* -álgebras,

Funcionales positivas I

Definición

Sean A una C^* -álgebra y $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ lineal. Se dice que φ es positiva si $\varphi(a^*a) \geq 0$, para todo $a \in A$.

Ejemplos

(1) Si $\pi : A \rightarrow \mathbb{C}$ es un homomorfismo de C^* -álgebras,

Funcionales positivas I

Definición

Sean A una C^* -álgebra y $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ lineal. Se dice que φ es positiva si $\varphi(a^*a) \geq 0$, para todo $a \in A$.

Ejemplos

- (1) Si $\pi : A \rightarrow \mathbb{C}$ es un homomorfismo de C^* -álgebras, entonces φ es positiva,

Funcionales positivas I

Definición

Sean A una C^* -álgebra y $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ lineal. Se dice que φ es positiva si $\varphi(a^*a) \geq 0$, para todo $a \in A$.

Ejemplos

- (1) Si $\pi : A \rightarrow \mathbb{C}$ es un homomorfismo de C^* -álgebras, entonces φ es positiva, porque

Funcionales positivas I

Definición

Sean A una C^* -álgebra y $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ lineal. Se dice que φ es positiva si $\varphi(a^*a) \geq 0$, para todo $a \in A$.

Ejemplos

- (1) Si $\pi : A \rightarrow \mathbb{C}$ es un homomorfismo de C^* -álgebras, entonces φ es positiva, porque

$$\varphi(a^*a) = \varphi(a^*)\varphi(a)$$

Funcionales positivas I

Definición

Sean A una C^* -álgebra y $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ lineal. Se dice que φ es positiva si $\varphi(a^*a) \geq 0$, para todo $a \in A$.

Ejemplos

- (1) Si $\pi : A \rightarrow \mathbb{C}$ es un homomorfismo de C^* -álgebras, entonces φ es positiva, porque

$$\varphi(a^*a) = \varphi(a^*)\varphi(a) = \overline{\varphi(a)}\varphi(a)$$

Funcionales positivas I

Definición

Sean A una C^* -álgebra y $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ lineal. Se dice que φ es positiva si $\varphi(a^*a) \geq 0$, para todo $a \in A$.

Ejemplos

- (1) Si $\pi : A \rightarrow \mathbb{C}$ es un homomorfismo de C^* -álgebras, entonces φ es positiva, porque

$$\varphi(a^*a) = \varphi(a^*)\varphi(a) = \overline{\varphi(a)}\varphi(a) = |\varphi(a)|^2$$

Funcionales positivas I

Definición

Sean A una C^* -álgebra y $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ lineal. Se dice que φ es positiva si $\varphi(a^*a) \geq 0$, para todo $a \in A$.

Ejemplos

- (1) Si $\pi : A \rightarrow \mathbb{C}$ es un homomorfismo de C^* -álgebras, entonces φ es positiva, porque

$$\varphi(a^*a) = \varphi(a^*)\varphi(a) = \overline{\varphi(a)}\varphi(a) = |\varphi(a)|^2 \geq 0.$$

Funcionales positivas I

Definición

Sean A una C^* -álgebra y $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ lineal. Se dice que φ es positiva si $\varphi(a^*a) \geq 0$, para todo $a \in A$.

Ejemplos

- (1) Si $\pi : A \rightarrow \mathbb{C}$ es un homomorfismo de C^* -álgebras, entonces φ es positiva, porque

$$\varphi(a^*a) = \varphi(a^*)\varphi(a) = \overline{\varphi(a)}\varphi(a) = |\varphi(a)|^2 \geq 0.$$

En particular si A es conmutativa, entonces $\hat{A}$ está formada por funcionales positivas.

Funcionales positivas I

Definición

Sean A una C^* -álgebra y $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ lineal. Se dice que φ es positiva si $\varphi(a^*a) \geq 0$, para todo $a \in A$.

Ejemplos

- (1) Si $\pi : A \rightarrow \mathbb{C}$ es un homomorfismo de C^* -álgebras, entonces φ es positiva, porque

$$\varphi(a^*a) = \varphi(a^*)\varphi(a) = \overline{\varphi(a)}\varphi(a) = |\varphi(a)|^2 \geq 0.$$

En particular si A es conmutativa, entonces $\hat{A}$ está formada por funcionales positivas.

- (2) Si $A = M_n(\mathbb{C})$ entonces la traza $\text{tr} : A \rightarrow \mathbb{C}$ es positiva,

Funcionales positivas I

Definición

Sean A una C^* -álgebra y $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ lineal. Se dice que φ es positiva si $\varphi(a^*a) \geq 0$, para todo $a \in A$.

Ejemplos

- (1) Si $\pi : A \rightarrow \mathbb{C}$ es un homomorfismo de C^* -álgebras, entonces φ es positiva, porque

$$\varphi(a^*a) = \varphi(a^*)\varphi(a) = \overline{\varphi(a)}\varphi(a) = |\varphi(a)|^2 \geq 0.$$

En particular si A es conmutativa, entonces $\hat{A}$ está formada por funcionales positivas.

- (2) Si $A = M_n(\mathbb{C})$ entonces la traza $\text{tr} : A \rightarrow \mathbb{C}$ es positiva,

Funcionales positivas I

Definición

Sean A una C^* -álgebra y $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ lineal. Se dice que φ es positiva si $\varphi(a^*a) \geq 0$, para todo $a \in A$.

Ejemplos

- (1) Si $\pi : A \rightarrow \mathbb{C}$ es un homomorfismo de C^* -álgebras, entonces φ es positiva, porque

$$\varphi(a^*a) = \varphi(a^*)\varphi(a) = \overline{\varphi(a)}\varphi(a) = |\varphi(a)|^2 \geq 0.$$

En particular si A es conmutativa, entonces $\hat{A}$ está formada por funcionales positivas.

- (2) Si $A = M_n(\mathbb{C})$ entonces la traza $\text{tr} : A \rightarrow \mathbb{C}$ es positiva, porque $\text{tr}(a^*a) = \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 \geq 0$.

Funcionales positivas I

Definición

Sean A una C^* -álgebra y $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ lineal. Se dice que φ es positiva si $\varphi(a^*a) \geq 0$, para todo $a \in A$.

Ejemplos

- (1) Si $\pi : A \rightarrow \mathbb{C}$ es un homomorfismo de C^* -álgebras, entonces φ es positiva, porque

$$\varphi(a^*a) = \varphi(a^*)\varphi(a) = \overline{\varphi(a)}\varphi(a) = |\varphi(a)|^2 \geq 0.$$

En particular si A es conmutativa, entonces $\hat{A}$ está formada por funcionales positivas.

- (2) Si $A = M_n(\mathbb{C})$ entonces la traza $\text{tr} : A \rightarrow \mathbb{C}$ es positiva, porque $\text{tr}(a^*a) = \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 \geq 0$.
- (3) Sean $A = B(\mathcal{H})$, $\xi \in \mathcal{H}$, y $\varphi_\xi : B(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\varphi_\xi(T) = \langle T\xi, \xi \rangle$.

Funcionales positivas I

Definición

Sean A una C^* -álgebra y $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ lineal. Se dice que φ es positiva si $\varphi(a^*a) \geq 0$, para todo $a \in A$.

Ejemplos

- (1) Si $\pi : A \rightarrow \mathbb{C}$ es un homomorfismo de C^* -álgebras, entonces φ es positiva, porque

$$\varphi(a^*a) = \varphi(a^*)\varphi(a) = \overline{\varphi(a)}\varphi(a) = |\varphi(a)|^2 \geq 0.$$

En particular si A es conmutativa, entonces $\hat{A}$ está formada por funcionales positivas.

- (2) Si $A = M_n(\mathbb{C})$ entonces la traza $\text{tr} : A \rightarrow \mathbb{C}$ es positiva, porque $\text{tr}(a^*a) = \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 \geq 0$.
- (3) Sean $A = B(\mathcal{H})$, $\xi \in \mathcal{H}$, y $\varphi_\xi : B(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\varphi_\xi(T) = \langle T\xi, \xi \rangle$.

Funcionales positivas I

Definición

Sean A una C^* -álgebra y $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ lineal. Se dice que φ es positiva si $\varphi(a^*a) \geq 0$, para todo $a \in A$.

Ejemplos

- (1) Si $\pi : A \rightarrow \mathbb{C}$ es un homomorfismo de C^* -álgebras, entonces φ es positiva, porque

$$\varphi(a^*a) = \varphi(a^*)\varphi(a) = \overline{\varphi(a)}\varphi(a) = |\varphi(a)|^2 \geq 0.$$

En particular si A es conmutativa, entonces $\hat{A}$ está formada por funcionales positivas.

- (2) Si $A = M_n(\mathbb{C})$ entonces la traza $\text{tr} : A \rightarrow \mathbb{C}$ es positiva, porque $\text{tr}(a^*a) = \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 \geq 0$.
- (3) Sean $A = B(\mathcal{H})$, $\xi \in \mathcal{H}$, y $\varphi_\xi : B(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\varphi_\xi(T) = \langle T\xi, \xi \rangle$. Entonces $\varphi_\xi \geq 0$ porque para todo $T \in B(\mathcal{H})$ se tiene

Funcionales positivas I

Definición

Sean A una C^* -álgebra y $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ lineal. Se dice que φ es positiva si $\varphi(a^*a) \geq 0$, para todo $a \in A$.

Ejemplos

- (1) Si $\pi : A \rightarrow \mathbb{C}$ es un homomorfismo de C^* -álgebras, entonces φ es positiva, porque

$$\varphi(a^*a) = \varphi(a^*)\varphi(a) = \overline{\varphi(a)}\varphi(a) = |\varphi(a)|^2 \geq 0.$$

En particular si A es conmutativa, entonces $\hat{A}$ está formada por funcionales positivas.

- (2) Si $A = M_n(\mathbb{C})$ entonces la traza $\text{tr} : A \rightarrow \mathbb{C}$ es positiva, porque $\text{tr}(a^*a) = \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 \geq 0$.
- (3) Sean $A = B(\mathcal{H})$, $\xi \in \mathcal{H}$, y $\varphi_\xi : B(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\varphi_\xi(T) = \langle T\xi, \xi \rangle$. Entonces $\varphi_\xi \geq 0$ porque para todo $T \in B(\mathcal{H})$ se tiene

$$\varphi_\xi(T^*T) = \langle T^*T\xi, \xi \rangle$$

Funcionales positivas I

Definición

Sean A una C^* -álgebra y $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ lineal. Se dice que φ es positiva si $\varphi(a^*a) \geq 0$, para todo $a \in A$.

Ejemplos

- (1) Si $\pi : A \rightarrow \mathbb{C}$ es un homomorfismo de C^* -álgebras, entonces φ es positiva, porque

$$\varphi(a^*a) = \varphi(a^*)\varphi(a) = \overline{\varphi(a)}\varphi(a) = |\varphi(a)|^2 \geq 0.$$

En particular si A es conmutativa, entonces $\hat{A}$ está formada por funcionales positivas.

- (2) Si $A = M_n(\mathbb{C})$ entonces la traza $\text{tr} : A \rightarrow \mathbb{C}$ es positiva, porque $\text{tr}(a^*a) = \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 \geq 0$.
- (3) Sean $A = B(\mathcal{H})$, $\xi \in \mathcal{H}$, y $\varphi_\xi : B(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\varphi_\xi(T) = \langle T\xi, \xi \rangle$. Entonces $\varphi_\xi \geq 0$ porque para todo $T \in B(\mathcal{H})$ se tiene

$$\varphi_\xi(T^*T) = \langle T^*T\xi, \xi \rangle = \|T\xi\|^2$$

Funcionales positivas I

Definición

Sean A una C^* -álgebra y $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ lineal. Se dice que φ es positiva si $\varphi(a^*a) \geq 0$, para todo $a \in A$.

Ejemplos

- (1) Si $\pi : A \rightarrow \mathbb{C}$ es un homomorfismo de C^* -álgebras, entonces φ es positiva, porque

$$\varphi(a^*a) = \varphi(a^*)\varphi(a) = \overline{\varphi(a)}\varphi(a) = |\varphi(a)|^2 \geq 0.$$

En particular si A es conmutativa, entonces $\hat{A}$ está formada por funcionales positivas.

- (2) Si $A = M_n(\mathbb{C})$ entonces la traza $\text{tr} : A \rightarrow \mathbb{C}$ es positiva, porque $\text{tr}(a^*a) = \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 \geq 0$.
- (3) Sean $A = B(\mathcal{H})$, $\xi \in \mathcal{H}$, y $\varphi_\xi : B(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\varphi_\xi(T) = \langle T\xi, \xi \rangle$. Entonces $\varphi_\xi \geq 0$ porque para todo $T \in B(\mathcal{H})$ se tiene

$$\varphi_\xi(T^*T) = \langle T^*T\xi, \xi \rangle = \|T\xi\|^2 \geq 0.$$

(4) Más en general,

(4) Más en general,

(4) Más en general, si $\pi : A \rightarrow B(\mathcal{H})$ es una representación y $\xi \in \mathcal{H}$,

- (4) Más en general, si $\pi : A \rightarrow B(\mathcal{H})$ es una representación y $\xi \in \mathcal{H}$, sea $\psi_\xi : A \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\psi_\xi(a) = \varphi_\xi \circ \pi(a)$

- (4) Más en general, si $\pi : A \rightarrow B(\mathcal{H})$ es una representación y $\xi \in \mathcal{H}$, sea $\psi_\xi : A \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\psi_\xi(a) = \varphi_\xi \circ \pi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle$.

- (4) Más en general, si $\pi : A \rightarrow B(\mathcal{H})$ es una representación y $\xi \in \mathcal{H}$, sea $\psi_\xi : A \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\psi_\xi(a) = \varphi_\xi \circ \pi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle$. Entonces $\varphi \geq 0$.

- (4) Más en general, si $\pi : A \rightarrow B(\mathcal{H})$ es una representación y $\xi \in \mathcal{H}$, sea $\psi_\xi : A \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\psi_\xi(a) = \varphi_\xi \circ \pi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle$. Entonces $\varphi \geq 0$.
- (5) Sean $A = C_0(X)$ y $\mu \in M(X)$, $\mu \geq 0$.

- (4) Más en general, si $\pi : A \rightarrow B(\mathcal{H})$ es una representación y $\xi \in \mathcal{H}$, sea $\psi_\xi : A \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\psi_\xi(a) = \varphi_\xi \circ \pi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle$. Entonces $\varphi \geq 0$.
- (5) Sean $A = C_0(X)$ y $\mu \in M(X)$, $\mu \geq 0$.

- (4) Más en general, si $\pi : A \rightarrow B(\mathcal{H})$ es una representación y $\xi \in \mathcal{H}$, sea $\psi_\xi : A \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\psi_\xi(a) = \varphi_\xi \circ \pi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle$. Entonces $\varphi \geq 0$.
- (5) Sean $A = C_0(X)$ y $\mu \in M(X)$, $\mu \geq 0$. Considérese $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\varphi(a) = \int_X a \, d\mu$.

- (4) Más en general, si $\pi : A \rightarrow B(\mathcal{H})$ es una representación y $\xi \in \mathcal{H}$, sea $\psi_\xi : A \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\psi_\xi(a) = \varphi_\xi \circ \pi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle$. Entonces $\varphi \geq 0$.
- (5) Sean $A = C_0(X)$ y $\mu \in M(X)$, $\mu \geq 0$. Considérese $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\varphi(a) = \int_X a \, d\mu$. Entonces $\varphi \geq 0$.

- (4) Más en general, si $\pi : A \rightarrow B(\mathcal{H})$ es una representación y $\xi \in \mathcal{H}$, sea $\psi_\xi : A \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\psi_\xi(a) = \varphi_\xi \circ \pi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle$. Entonces $\varphi \geq 0$.
- (5) Sean $A = C_0(X)$ y $\mu \in M(X)$, $\mu \geq 0$. Considérese $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\varphi(a) = \int_X a \, d\mu$. Entonces $\varphi \geq 0$.

Proposición

Sean A una C^ -álgebra y $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funcional positiva. Entonces*

- (4) Más en general, si $\pi : A \rightarrow B(\mathcal{H})$ es una representación y $\xi \in \mathcal{H}$, sea $\psi_\xi : A \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\psi_\xi(a) = \varphi_\xi \circ \pi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle$. Entonces $\varphi \geq 0$.
- (5) Sean $A = C_0(X)$ y $\mu \in M(X)$, $\mu \geq 0$. Considérese $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\varphi(a) = \int_X a \, d\mu$. Entonces $\varphi \geq 0$.

Proposición

Sean A una C^* -álgebra y $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funcional positiva. Entonces

- (1) φ es continua.

- (4) Más en general, si $\pi : A \rightarrow B(\mathcal{H})$ es una representación y $\xi \in \mathcal{H}$, sea $\psi_\xi : A \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\psi_\xi(a) = \varphi_\xi \circ \pi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle$. Entonces $\varphi \geq 0$.
- (5) Sean $A = C_0(X)$ y $\mu \in M(X)$, $\mu \geq 0$. Considérese $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\varphi(a) = \int_X a \, d\mu$. Entonces $\varphi \geq 0$.

Proposición

Sean A una C^* -álgebra y $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funcional positiva. Entonces

- (1) φ es continua.
- (2) Si $a = a^*$, entonces $\varphi(a) \in \mathbb{R}$.

- (4) Más en general, si $\pi : A \rightarrow B(\mathcal{H})$ es una representación y $\xi \in \mathcal{H}$, sea $\psi_\xi : A \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\psi_\xi(a) = \varphi_\xi \circ \pi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle$. Entonces $\varphi \geq 0$.
- (5) Sean $A = C_0(X)$ y $\mu \in M(X)$, $\mu \geq 0$. Considérese $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\varphi(a) = \int_X a \, d\mu$. Entonces $\varphi \geq 0$.

Proposición

Sean A una C^* -álgebra y $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funcional positiva. Entonces

- (1) φ es continua.
- (2) Si $a = a^*$, entonces $\varphi(a) \in \mathbb{R}$.
- (3) $\varphi(a^*) = \overline{\varphi(a)}$, para todo $a \in A$.

- (4) Más en general, si $\pi : A \rightarrow B(\mathcal{H})$ es una representación y $\xi \in \mathcal{H}$, sea $\psi_\xi : A \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\psi_\xi(a) = \varphi_\xi \circ \pi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle$. Entonces $\varphi \geq 0$.
- (5) Sean $A = C_0(X)$ y $\mu \in M(X)$, $\mu \geq 0$. Considérese $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\varphi(a) = \int_X a \, d\mu$. Entonces $\varphi \geq 0$.

Proposición

Sean A una C^* -álgebra y $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funcional positiva. Entonces

- (1) φ es continua.
- (2) Si $a = a^*$, entonces $\varphi(a) \in \mathbb{R}$.
- (3) $\varphi(a^*) = \overline{\varphi(a)}$, para todo $a \in A$.
- (4) Sea $[\cdot, \cdot]_\varphi : A \times A \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $[a, b]_\varphi := \varphi(b^*a)$.

- (4) Más en general, si $\pi : A \rightarrow B(\mathcal{H})$ es una representación y $\xi \in \mathcal{H}$, sea $\psi_\xi : A \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\psi_\xi(a) = \varphi_\xi \circ \pi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle$. Entonces $\varphi \geq 0$.
- (5) Sean $A = C_0(X)$ y $\mu \in M(X)$, $\mu \geq 0$. Considérese $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\varphi(a) = \int_X a \, d\mu$. Entonces $\varphi \geq 0$.

Proposición

Sean A una C^* -álgebra y $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funcional positiva. Entonces

- (1) φ es continua.
- (2) Si $a = a^*$, entonces $\varphi(a) \in \mathbb{R}$.
- (3) $\varphi(a^*) = \overline{\varphi(a)}$, para todo $a \in A$.
- (4) Sea $[\cdot, \cdot]_\varphi : A \times A \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $[a, b]_\varphi := \varphi(b^*a)$.

- (4) Más en general, si $\pi : A \rightarrow B(\mathcal{H})$ es una representación y $\xi \in \mathcal{H}$, sea $\psi_\xi : A \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\psi_\xi(a) = \varphi_\xi \circ \pi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle$. Entonces $\varphi \geq 0$.
- (5) Sean $A = C_0(X)$ y $\mu \in M(X)$, $\mu \geq 0$. Considérese $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\varphi(a) = \int_X a \, d\mu$. Entonces $\varphi \geq 0$.

Proposición

Sean A una C^ -álgebra y $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funcional positiva. Entonces*

- (1) *φ es continua.*
- (2) *Si $a = a^*$, entonces $\varphi(a) \in \mathbb{R}$.*
- (3) *$\varphi(a^*) = \overline{\varphi(a)}$, para todo $a \in A$.*
- (4) *Sea $[\cdot, \cdot]_\varphi : A \times A \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $[a, b]_\varphi := \varphi(b^*a)$. Entonces $[\cdot, \cdot]_\varphi$ es una forma sesquilineal semidefinida positiva acotada sobre A .*

- (4) Más en general, si $\pi : A \rightarrow B(\mathcal{H})$ es una representación y $\xi \in \mathcal{H}$, sea $\psi_\xi : A \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\psi_\xi(a) = \varphi_\xi \circ \pi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle$. Entonces $\varphi \geq 0$.
- (5) Sean $A = C_0(X)$ y $\mu \in M(X)$, $\mu \geq 0$. Considérese $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\varphi(a) = \int_X a \, d\mu$. Entonces $\varphi \geq 0$.

Proposición

Sean A una C^* -álgebra y $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funcional positiva. Entonces

- (1) φ es continua.
- (2) Si $a = a^*$, entonces $\varphi(a) \in \mathbb{R}$.
- (3) $\varphi(a^*) = \overline{\varphi(a)}$, para todo $a \in A$.
- (4) Sea $[\cdot, \cdot]_\varphi : A \times A \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $[a, b]_\varphi := \varphi(b^*a)$. Entonces $[\cdot, \cdot]_\varphi$ es una forma sesquilineal semidefinida positiva acotada sobre A .
- (5) $|\varphi(a)|^2 \leq \|\varphi\| \varphi(a^*a)$.

- (4) Más en general, si $\pi : A \rightarrow B(\mathcal{H})$ es una representación y $\xi \in \mathcal{H}$, sea $\psi_\xi : A \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\psi_\xi(a) = \varphi_\xi \circ \pi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle$. Entonces $\varphi \geq 0$.
- (5) Sean $A = C_0(X)$ y $\mu \in M(X)$, $\mu \geq 0$. Considérese $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\varphi(a) = \int_X a \, d\mu$. Entonces $\varphi \geq 0$.

Proposición

Sean A una C^* -álgebra y $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funcional positiva. Entonces

- (1) φ es continua.
- (2) Si $a = a^*$, entonces $\varphi(a) \in \mathbb{R}$.
- (3) $\varphi(a^*) = \overline{\varphi(a)}$, para todo $a \in A$.
- (4) Sea $[\cdot, \cdot]_\varphi : A \times A \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $[a, b]_\varphi := \varphi(b^*a)$. Entonces $[\cdot, \cdot]_\varphi$ es una forma sesquilineal semidefinida positiva acotada sobre A .
- (5) $|\varphi(a)|^2 \leq \|\varphi\| \varphi(a^*a)$.
- (6) φ se extiende a una funcional positiva $\tilde{\varphi}$ sobre $\tilde{A}$.

Demostración.

(1) Dado $a \in A$,

Demostración.

(1) Dado $a \in A$,

Demostración.

(1) Dado $a \in A$, es $a = [(Rea)_+ - (Rea)_-] + i[(Ima)_+ - (Ima)_-]$.

Demostración.

(1) Dado $a \in A$, es $a = [(Rea)_+ - (Rea)_-] + i[(Ima)_+ - (Ima)_-]$.

Supongamos probado que existe $K > 0$ tal que para todo $c \in A_+$ se tiene que $\varphi(c) \leq K\|c\|$.

Demostración.

(1) Dado $a \in A$, es $a = [(Rea)_+ - (Rea)_-] + i[(Ima)_+ - (Ima)_-]$.

Supongamos probado que existe $K > 0$ tal que para todo $c \in A_+$ se tiene que $\varphi(c) \leq K\|c\|$. Entonces:

Demostración.

(1) Dado $a \in A$, es $a = [(Rea)_+ - (Rea)_-] + i[(Ima)_+ - (Ima)_-]$.

Supongamos probado que existe $K > 0$ tal que para todo $c \in A_+$ se tiene que $\varphi(c) \leq K\|c\|$. Entonces:

$$|\varphi(a)| \leq \varphi((Rea)_+) + \varphi((Rea)_-) + \varphi((Ima)_+) + \varphi((Ima)_-)$$

Demostración.

(1) Dado $a \in A$, es $a = [(Rea)_+ - (Rea)_-] + i[(Ima)_+ - (Ima)_-]$.

Supongamos probado que existe $K > 0$ tal que para todo $c \in A_+$ se tiene que $\varphi(c) \leq K\|c\|$. Entonces:

$$\begin{aligned} |\varphi(a)| &\leq \varphi((Rea)_+) + \varphi((Rea)_-) + \varphi((Ima)_+) + \varphi((Ima)_-) \\ &\leq K [\|(Rea)_+\| + \|(Rea)_-\| + \|(Ima)_+\| + \|(Ima)_-\|] \end{aligned}$$

Demostración.

(1) Dado $a \in A$, es $a = [(Rea)_+ - (Rea)_-] + i[(Ima)_+ - (Ima)_-]$.

Supongamos probado que existe $K > 0$ tal que para todo $c \in A_+$ se tiene que $\varphi(c) \leq K\|c\|$. Entonces:

$$\begin{aligned} |\varphi(a)| &\leq \varphi((Rea)_+) + \varphi((Rea)_-) + \varphi((Ima)_+) + \varphi((Ima)_-) \\ &\leq K [\|(Rea)_+\| + \|(Rea)_-\| + \|(Ima)_+\| + \|(Ima)_-\|] \leq 4K\|a\|, \end{aligned}$$

Demostración.

(1) Dado $a \in A$, es $a = [(Rea)_+ - (Rea)_-] + i[(Ima)_+ - (Ima)_-]$.

Supongamos probado que existe $K > 0$ tal que para todo $c \in A_+$ se tiene que $\varphi(c) \leq K\|c\|$. Entonces:

$$\begin{aligned} |\varphi(a)| &\leq \varphi((Rea)_+) + \varphi((Rea)_-) + \varphi((Ima)_+) + \varphi((Ima)_-) \\ &\leq K [\|(Rea)_+\| + \|(Rea)_-\| + \|(Ima)_+\| + \|(Ima)_-\|] \leq 4K\|a\|, \end{aligned}$$

y por lo tanto φ es continua.

Demostración.

(1) Dado $a \in A$, es $a = [(Rea)_+ - (Rea)_-] + i[(Ima)_+ - (Ima)_-]$.

Supongamos probado que existe $K > 0$ tal que para todo $c \in A_+$ se tiene que $\varphi(c) \leq K\|c\|$. Entonces:

$$\begin{aligned} |\varphi(a)| &\leq \varphi((Rea)_+) + \varphi((Rea)_-) + \varphi((Ima)_+) + \varphi((Ima)_-) \\ &\leq K [\|(Rea)_+\| + \|(Rea)_-\| + \|(Ima)_+\| + \|(Ima)_-\|] \leq 4K\|a\|, \end{aligned}$$

y por lo tanto φ es continua. Supongamos que no existe una tal K .

Demostración.

(1) Dado $a \in A$, es $a = [(Rea)_+ - (Rea)_-] + i[(Ima)_+ - (Ima)_-]$.

Supongamos probado que existe $K > 0$ tal que para todo $c \in A_+$ se tiene que $\varphi(c) \leq K\|c\|$. Entonces:

$$\begin{aligned} |\varphi(a)| &\leq \varphi((Rea)_+) + \varphi((Rea)_-) + \varphi((Ima)_+) + \varphi((Ima)_-) \\ &\leq K [\|(Rea)_+\| + \|(Rea)_-\| + \|(Ima)_+\| + \|(Ima)_-\|] \leq 4K\|a\|, \end{aligned}$$

y por lo tanto φ es continua. Supongamos que no existe una tal K . Es decir que para todo n existe $c_n \in A_+$ tal que $\|c_n\| = 1$ y $\varphi(c_n) > 2^n$.

Demostración.

(1) Dado $a \in A$, es $a = [(Rea)_+ - (Rea)_-] + i[(Ima)_+ - (Ima)_-]$.

Supongamos probado que existe $K > 0$ tal que para todo $c \in A_+$ se tiene que $\varphi(c) \leq K\|c\|$. Entonces:

$$\begin{aligned} |\varphi(a)| &\leq \varphi((Rea)_+) + \varphi((Rea)_-) + \varphi((Ima)_+) + \varphi((Ima)_-) \\ &\leq K [\|(Rea)_+\| + \|(Rea)_-\| + \|(Ima)_+\| + \|(Ima)_-\|] \leq 4K\|a\|, \end{aligned}$$

y por lo tanto φ es continua. Supongamos que no existe una tal K . Es decir que para todo n existe $c_n \in A_+$ tal que $\|c_n\| = 1$ y $\varphi(c_n) > 2^n$. Sea $c = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} c_n$;

Demostración.

(1) Dado $a \in A$, es $a = [(Rea)_+ - (Rea)_-] + i[(Ima)_+ - (Ima)_-]$.

Supongamos probado que existe $K > 0$ tal que para todo $c \in A_+$ se tiene que $\varphi(c) \leq K\|c\|$. Entonces:

$$\begin{aligned} |\varphi(a)| &\leq \varphi((Rea)_+) + \varphi((Rea)_-) + \varphi((Ima)_+) + \varphi((Ima)_-) \\ &\leq K [\|(Rea)_+\| + \|(Rea)_-\| + \|(Ima)_+\| + \|(Ima)_-\|] \leq 4K\|a\|, \end{aligned}$$

y por lo tanto φ es continua. Supongamos que no existe una tal K . Es decir que para todo n existe $c_n \in A_+$ tal que $\|c_n\| = 1$ y $\varphi(c_n) > 2^n$. Sea $c = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} c_n$; entonces $\|c\| \leq 1$

Demostración.

(1) Dado $a \in A$, es $a = [(Rea)_+ - (Rea)_-] + i[(Ima)_+ - (Ima)_-]$.

Supongamos probado que existe $K > 0$ tal que para todo $c \in A_+$ se tiene que $\varphi(c) \leq K\|c\|$. Entonces:

$$\begin{aligned} |\varphi(a)| &\leq \varphi((Rea)_+) + \varphi((Rea)_-) + \varphi((Ima)_+) + \varphi((Ima)_-) \\ &\leq K [\|(Rea)_+\| + \|(Rea)_-\| + \|(Ima)_+\| + \|(Ima)_-\|] \leq 4K\|a\|, \end{aligned}$$

y por lo tanto φ es continua. Supongamos que no existe una tal K . Es decir que para todo n existe $c_n \in A_+$ tal que $\|c_n\| = 1$ y $\varphi(c_n) > 2^n$. Sea $c = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} c_n$; entonces $\|c\| \leq 1$ y $c \in A_+$:

Demostración.

(1) Dado $a \in A$, es $a = [(Rea)_+ - (Rea)_-] + i[(Ima)_+ - (Ima)_-]$.

Supongamos probado que existe $K > 0$ tal que para todo $c \in A_+$ se tiene que $\varphi(c) \leq K\|c\|$. Entonces:

$$\begin{aligned} |\varphi(a)| &\leq \varphi((Rea)_+) + \varphi((Rea)_-) + \varphi((Ima)_+) + \varphi((Ima)_-) \\ &\leq K [\|(Rea)_+\| + \|(Rea)_-\| + \|(Ima)_+\| + \|(Ima)_-\|] \leq 4K\|a\|, \end{aligned}$$

y por lo tanto φ es continua. Supongamos que no existe una tal K . Es decir que para todo n existe $c_n \in A_+$ tal que $\|c_n\| = 1$ y $\varphi(c_n) > 2^n$. Sea $c = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} c_n$; entonces $\|c\| \leq 1$ y $c \in A_+$: c_n es positivo para todo n ,

Demostración.

(1) Dado $a \in A$, es $a = [(Rea)_+ - (Rea)_-] + i[(Ima)_+ - (Ima)_-]$.

Supongamos probado que existe $K > 0$ tal que para todo $c \in A_+$ se tiene que $\varphi(c) \leq K\|c\|$. Entonces:

$$\begin{aligned} |\varphi(a)| &\leq \varphi((Rea)_+) + \varphi((Rea)_-) + \varphi((Ima)_+) + \varphi((Ima)_-) \\ &\leq K [\|(Rea)_+\| + \|(Rea)_-\| + \|(Ima)_+\| + \|(Ima)_-\|] \leq 4K\|a\|, \end{aligned}$$

y por lo tanto φ es continua. Supongamos que no existe una tal K . Es decir que para todo n existe $c_n \in A_+$ tal que $\|c_n\| = 1$ y $\varphi(c_n) > 2^n$. Sea $c = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} c_n$; entonces $\|c\| \leq 1$ y $c \in A_+$: c_n es positivo para todo n , así que las sumas parciales son positivas y,

Demostración.

(1) Dado $a \in A$, es $a = [(Rea)_+ - (Rea)_-] + i[(Ima)_+ - (Ima)_-]$.

Supongamos probado que existe $K > 0$ tal que para todo $c \in A_+$ se tiene que $\varphi(c) \leq K\|c\|$. Entonces:

$$\begin{aligned} |\varphi(a)| &\leq \varphi((Rea)_+) + \varphi((Rea)_-) + \varphi((Ima)_+) + \varphi((Ima)_-) \\ &\leq K [\|(Rea)_+\| + \|(Rea)_-\| + \|(Ima)_+\| + \|(Ima)_-\|] \leq 4K\|a\|, \end{aligned}$$

y por lo tanto φ es continua. Supongamos que no existe una tal K . Es decir que para todo n existe $c_n \in A_+$ tal que $\|c_n\| = 1$ y $\varphi(c_n) > 2^n$. Sea $c = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} c_n$; entonces $\|c\| \leq 1$ y $c \in A_+$: c_n es positivo para todo n , así que las sumas parciales son positivas y, como A_+ es cerrado,

Demostración.

(1) Dado $a \in A$, es $a = [(Rea)_+ - (Rea)_-] + i[(Ima)_+ - (Ima)_-]$.

Supongamos probado que existe $K > 0$ tal que para todo $c \in A_+$ se tiene que $\varphi(c) \leq K\|c\|$. Entonces:

$$\begin{aligned} |\varphi(a)| &\leq \varphi((Rea)_+) + \varphi((Rea)_-) + \varphi((Ima)_+) + \varphi((Ima)_-) \\ &\leq K [\|(Rea)_+\| + \|(Rea)_-\| + \|(Ima)_+\| + \|(Ima)_-\|] \leq 4K\|a\|, \end{aligned}$$

y por lo tanto φ es continua. Supongamos que no existe una tal K . Es decir que para todo n existe $c_n \in A_+$ tal que $\|c_n\| = 1$ y $\varphi(c_n) > 2^n$. Sea $c = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} c_n$; entonces $\|c\| \leq 1$ y $c \in A_+$: c_n es positivo para todo n , así que las sumas parciales son positivas y, como A_+ es cerrado, el límite c está en A_+ .

Demostración.

(1) Dado $a \in A$, es $a = [(Rea)_+ - (Rea)_-] + i[(Ima)_+ - (Ima)_-]$.

Supongamos probado que existe $K > 0$ tal que para todo $c \in A_+$ se tiene que $\varphi(c) \leq K\|c\|$. Entonces:

$$\begin{aligned} |\varphi(a)| &\leq \varphi((Rea)_+) + \varphi((Rea)_-) + \varphi((Ima)_+) + \varphi((Ima)_-) \\ &\leq K [\|(Rea)_+\| + \|(Rea)_-\| + \|(Ima)_+\| + \|(Ima)_-\|] \leq 4K\|a\|, \end{aligned}$$

y por lo tanto φ es continua. Supongamos que no existe una tal K . Es decir que para todo n existe $c_n \in A_+$ tal que $\|c_n\| = 1$ y $\varphi(c_n) > 2^n$. Sea $c = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} c_n$; entonces $\|c\| \leq 1$ y $c \in A_+$: c_n es positivo para todo n , así que las sumas parciales son positivas y, como A_+ es cerrado, el límite c está en A_+ . Además $c \geq \sum_{j=1}^n \frac{1}{2^j} c_j$,

Demostración.

(1) Dado $a \in A$, es $a = [(Rea)_+ - (Rea)_-] + i[(Ima)_+ - (Ima)_-]$.

Supongamos probado que existe $K > 0$ tal que para todo $c \in A_+$ se tiene que $\varphi(c) \leq K\|c\|$. Entonces:

$$\begin{aligned} |\varphi(a)| &\leq \varphi((Rea)_+) + \varphi((Rea)_-) + \varphi((Ima)_+) + \varphi((Ima)_-) \\ &\leq K [\|(Rea)_+\| + \|(Rea)_-\| + \|(Ima)_+\| + \|(Ima)_-\|] \leq 4K\|a\|, \end{aligned}$$

y por lo tanto φ es continua. Supongamos que no existe una tal K . Es decir que para todo n existe $c_n \in A_+$ tal que $\|c_n\| = 1$ y $\varphi(c_n) > 2^n$. Sea $c = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} c_n$; entonces $\|c\| \leq 1$ y $c \in A_+$: c_n es positivo para todo n , así que las sumas parciales son positivas y, como A_+ es cerrado, el límite c está en A_+ . Además $c \geq \sum_{j=1}^n \frac{1}{2^j} c_j$, de donde

Demostración.

(1) Dado $a \in A$, es $a = [(Rea)_+ - (Rea)_-] + i[(Ima)_+ - (Ima)_-]$.

Supongamos probado que existe $K > 0$ tal que para todo $c \in A_+$ se tiene que $\varphi(c) \leq K\|c\|$. Entonces:

$$\begin{aligned} |\varphi(a)| &\leq \varphi((Rea)_+) + \varphi((Rea)_-) + \varphi((Ima)_+) + \varphi((Ima)_-) \\ &\leq K [\|(Rea)_+\| + \|(Rea)_-\| + \|(Ima)_+\| + \|(Ima)_-\|] \leq 4K\|a\|, \end{aligned}$$

y por lo tanto φ es continua. Supongamos que no existe una tal K . Es decir que para todo n existe $c_n \in A_+$ tal que $\|c_n\| = 1$ y $\varphi(c_n) > 2^n$. Sea $c = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} c_n$; entonces $\|c\| \leq 1$ y $c \in A_+$: c_n es positivo para todo n , así que las sumas parciales son positivas y, como A_+ es cerrado, el límite c está en A_+ . Además $c \geq \sum_{j=1}^n \frac{1}{2^j} c_j$, de donde

$$\varphi(c) \geq \varphi\left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{2^j} c_j\right)$$

Demostración.

(1) Dado $a \in A$, es $a = [(Rea)_+ - (Rea)_-] + i[(Ima)_+ - (Ima)_-]$.

Supongamos probado que existe $K > 0$ tal que para todo $c \in A_+$ se tiene que $\varphi(c) \leq K\|c\|$. Entonces:

$$\begin{aligned} |\varphi(a)| &\leq \varphi((Rea)_+) + \varphi((Rea)_-) + \varphi((Ima)_+) + \varphi((Ima)_-) \\ &\leq K [\|(Rea)_+\| + \|(Rea)_-\| + \|(Ima)_+\| + \|(Ima)_-\|] \leq 4K\|a\|, \end{aligned}$$

y por lo tanto φ es continua. Supongamos que no existe una tal K . Es decir que para todo n existe $c_n \in A_+$ tal que $\|c_n\| = 1$ y $\varphi(c_n) > 2^n$. Sea $c = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} c_n$; entonces $\|c\| \leq 1$ y $c \in A_+$: c_n es positivo para todo n , así que las sumas parciales son positivas y, como A_+ es cerrado, el límite c está en A_+ . Además $c \geq \sum_{j=1}^n \frac{1}{2^j} c_j$, de donde

$$\varphi(c) \geq \varphi\left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{2^j} c_j\right) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2^j} \varphi(c_j) > n,$$

Demostración.

(1) Dado $a \in A$, es $a = [(Rea)_+ - (Rea)_-] + i[(Ima)_+ - (Ima)_-]$.

Supongamos probado que existe $K > 0$ tal que para todo $c \in A_+$ se tiene que $\varphi(c) \leq K\|c\|$. Entonces:

$$\begin{aligned} |\varphi(a)| &\leq \varphi((Rea)_+) + \varphi((Rea)_-) + \varphi((Ima)_+) + \varphi((Ima)_-) \\ &\leq K [\|(Rea)_+\| + \|(Rea)_-\| + \|(Ima)_+\| + \|(Ima)_-\|] \leq 4K\|a\|, \end{aligned}$$

y por lo tanto φ es continua. Supongamos que no existe una tal K . Es decir que para todo n existe $c_n \in A_+$ tal que $\|c_n\| = 1$ y $\varphi(c_n) > 2^n$. Sea $c = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} c_n$; entonces $\|c\| \leq 1$ y $c \in A_+$: c_n es positivo para todo n , así que las sumas parciales son positivas y, como A_+ es cerrado, el límite c está en A_+ . Además $c \geq \sum_{j=1}^n \frac{1}{2^j} c_j$, de donde

$$\varphi(c) \geq \varphi\left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{2^j} c_j\right) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2^j} \varphi(c_j) > n,$$

porque $\varphi(c_j) > 2^j$.

Demostración.

(1) Dado $a \in A$, es $a = [(Rea)_+ - (Rea)_-] + i[(Ima)_+ - (Ima)_-]$.

Supongamos probado que existe $K > 0$ tal que para todo $c \in A_+$ se tiene que $\varphi(c) \leq K\|c\|$. Entonces:

$$\begin{aligned} |\varphi(a)| &\leq \varphi((Rea)_+) + \varphi((Rea)_-) + \varphi((Ima)_+) + \varphi((Ima)_-) \\ &\leq K [\|(Rea)_+\| + \|(Rea)_-\| + \|(Ima)_+\| + \|(Ima)_-\|] \leq 4K\|a\|, \end{aligned}$$

y por lo tanto φ es continua. Supongamos que no existe una tal K . Es decir que para todo n existe $c_n \in A_+$ tal que $\|c_n\| = 1$ y $\varphi(c_n) > 2^n$. Sea $c = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} c_n$; entonces $\|c\| \leq 1$ y $c \in A_+$: c_n es positivo para todo n , así que las sumas parciales son positivas y, como A_+ es cerrado, el límite c está en A_+ . Además $c \geq \sum_{j=1}^n \frac{1}{2^j} c_j$, de donde

$$\varphi(c) \geq \varphi\left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{2^j} c_j\right) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2^j} \varphi(c_j) > n,$$

porque $\varphi(c_j) > 2^j$. Entonces $\varphi(c) = \infty$, lo cual es una contradicción.

Continuación de la prueba.

(2) Como a es autoadjunto se puede escribir $a = a_+ - a_-$,

Continuación de la prueba.

(2) Como a es autoadjunto se puede escribir $a = a_+ - a_-$,

Continuación de la prueba.

(2) Como a es autoadjunto se puede escribir $a = a_+ - a_-$, con $a_+, a_- \in A_+$.

Continuación de la prueba.

(2) Como a es autoadjunto se puede escribir $a = a_+ - a_-$, con $a_+, a_- \in A_+$. Entonces $\varphi(a) = \varphi(a_+) - \varphi(a_-) \in [0, \infty) - [0, \infty) = \mathbb{R}$.

Continuación de la prueba.

- (2) Como a es autoadjunto se puede escribir $a = a_+ - a_-$, con $a_+, a_- \in A_+$. Entonces $\varphi(a) = \varphi(a_+) - \varphi(a_-) \in [0, \infty) - [0, \infty) = \mathbb{R}$.
- (3) Se tiene $\varphi(a) = \varphi(\operatorname{Re} a) + i\varphi(\operatorname{Im} a)$,

Continuación de la prueba.

- (2) Como a es autoadjunto se puede escribir $a = a_+ - a_-$, con $a_+, a_- \in A_+$. Entonces $\varphi(a) = \varphi(a_+) - \varphi(a_-) \in [0, \infty) - [0, \infty) = \mathbb{R}$.
- (3) Se tiene $\varphi(a) = \varphi(\operatorname{Re} a) + i\varphi(\operatorname{Im} a)$, y como $\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a \in \mathbb{R}$,

Continuación de la prueba.

- (2) Como a es autoadjunto se puede escribir $a = a_+ - a_-$, con $a_+, a_- \in A_+$. Entonces $\varphi(a) = \varphi(a_+) - \varphi(a_-) \in [0, \infty) - [0, \infty) = \mathbb{R}$.
- (3) Se tiene $\varphi(a) = \varphi(\operatorname{Re} a) + i\varphi(\operatorname{Im} a)$, y como $\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a \in \mathbb{R}$, sigue que que $\overline{\varphi(a)} = \varphi(\operatorname{Re} a) - i\varphi(\operatorname{Im} a)$

Continuación de la prueba.

- (2) Como a es autoadjunto se puede escribir $a = a_+ - a_-$, con $a_+, a_- \in A_+$. Entonces $\varphi(a) = \varphi(a_+) - \varphi(a_-) \in [0, \infty) - [0, \infty) = \mathbb{R}$.
- (3) Se tiene $\varphi(a) = \varphi(\operatorname{Re} a) + i\varphi(\operatorname{Im} a)$, y como $\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a \in \mathbb{R}$, sigue que que $\overline{\varphi(a)} = \varphi(\operatorname{Re} a) - i\varphi(\operatorname{Im} a) = \varphi(\operatorname{Re} a - i\operatorname{Im} a)$

Continuación de la prueba.

- (2) Como a es autoadjunto se puede escribir $a = a_+ - a_-$, con $a_+, a_- \in A_+$. Entonces $\varphi(a) = \varphi(a_+) - \varphi(a_-) \in [0, \infty) - [0, \infty) = \mathbb{R}$.
- (3) Se tiene $\varphi(a) = \varphi(\operatorname{Re} a) + i\varphi(\operatorname{Im} a)$, y como $\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a \in \mathbb{R}$, sigue que que $\overline{\varphi(a)} = \varphi(\operatorname{Re} a) - i\varphi(\operatorname{Im} a) = \varphi(\operatorname{Re} a - i\operatorname{Im} a) = \varphi(a^*)$.

Continuación de la prueba.

- (2) Como a es autoadjunto se puede escribir $a = a_+ - a_-$, con $a_+, a_- \in A_+$. Entonces $\varphi(a) = \varphi(a_+) - \varphi(a_-) \in [0, \infty) - [0, \infty) = \mathbb{R}$.
- (3) Se tiene $\varphi(a) = \varphi(\operatorname{Re} a) + i\varphi(\operatorname{Im} a)$, y como $\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a \in \mathbb{R}$, sigue que que $\overline{\varphi(a)} = \varphi(\operatorname{Re} a) - i\varphi(\operatorname{Im} a) = \varphi(\operatorname{Re} a - i\operatorname{Im} a) = \varphi(a^*)$.
- (4) Es claro que $(a, b) \mapsto [a, b]_\varphi = \varphi(b^* a)$ es lineal en la primera variable y conjugado-lineal en la segunda variable.

Continuación de la prueba.

- (2) Como a es autoadjunto se puede escribir $a = a_+ - a_-$, con $a_+, a_- \in A_+$. Entonces $\varphi(a) = \varphi(a_+) - \varphi(a_-) \in [0, \infty) - [0, \infty) = \mathbb{R}$.
- (3) Se tiene $\varphi(a) = \varphi(\operatorname{Re} a) + i\varphi(\operatorname{Im} a)$, y como $\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a \in \mathbb{R}$, sigue que que $\overline{\varphi(a)} = \varphi(\operatorname{Re} a) - i\varphi(\operatorname{Im} a) = \varphi(\operatorname{Re} a - i\operatorname{Im} a) = \varphi(a^*)$.
- (4) Es claro que $(a, b) \mapsto [a, b]_\varphi = \varphi(b^* a)$ es lineal en la primera variable y conjugado-lineal en la segunda variable. Además $[a, a]_\varphi = \varphi(a^* a) \geq 0$ porque φ es positiva.

Continuación de la prueba.

- (2) Como a es autoadjunto se puede escribir $a = a_+ - a_-$, con $a_+, a_- \in A_+$. Entonces $\varphi(a) = \varphi(a_+) - \varphi(a_-) \in [0, \infty) - [0, \infty) = \mathbb{R}$.
- (3) Se tiene $\varphi(a) = \varphi(\operatorname{Re} a) + i\varphi(\operatorname{Im} a)$, y como $\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a \in \mathbb{R}$, sigue que que $\overline{\varphi(a)} = \varphi(\operatorname{Re} a) - i\varphi(\operatorname{Im} a) = \varphi(\operatorname{Re} a - i\operatorname{Im} a) = \varphi(a^*)$.
- (4) Es claro que $(a, b) \mapsto [a, b]_\varphi = \varphi(b^* a)$ es lineal en la primera variable y conjugado-lineal en la segunda variable. Además $[a, a]_\varphi = \varphi(a^* a) \geq 0$ porque φ es positiva. Entonces $[,]$ es una forma sesquilineal semidefinida positiva.

Continuación de la prueba.

- (2) Como a es autoadjunto se puede escribir $a = a_+ - a_-$, con $a_+, a_- \in A_+$. Entonces $\varphi(a) = \varphi(a_+) - \varphi(a_-) \in [0, \infty) - [0, \infty) = \mathbb{R}$.
- (3) Se tiene $\varphi(a) = \varphi(\operatorname{Re} a) + i\varphi(\operatorname{Im} a)$, y como $\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a \in \mathbb{R}$, sigue que que $\overline{\varphi(a)} = \varphi(\operatorname{Re} a) - i\varphi(\operatorname{Im} a) = \varphi(\operatorname{Re} a - i\operatorname{Im} a) = \varphi(a^*)$.
- (4) Es claro que $(a, b) \mapsto [a, b]_\varphi = \varphi(b^* a)$ es lineal en la primera variable y conjugado-lineal en la segunda variable. Además $[a, a]_\varphi = \varphi(a^* a) \geq 0$ porque φ es positiva. Entonces $[,]$ es una forma sesquilineal semidefinida positiva.
- (5) Como $[,]_\varphi$ es una forma sesquilineal semidefinida positiva,

Continuación de la prueba.

- (2) Como a es autoadjunto se puede escribir $a = a_+ - a_-$, con $a_+, a_- \in A_+$. Entonces $\varphi(a) = \varphi(a_+) - \varphi(a_-) \in [0, \infty) - [0, \infty) = \mathbb{R}$.
- (3) Se tiene $\varphi(a) = \varphi(\operatorname{Re} a) + i\varphi(\operatorname{Im} a)$, y como $\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a \in \mathbb{R}$, sigue que que $\overline{\varphi(a)} = \varphi(\operatorname{Re} a) - i\varphi(\operatorname{Im} a) = \varphi(\operatorname{Re} a - i\operatorname{Im} a) = \varphi(a^*)$.
- (4) Es claro que $(a, b) \mapsto [a, b]_\varphi = \varphi(b^* a)$ es lineal en la primera variable y conjugado-lineal en la segunda variable. Además $[a, a]_\varphi = \varphi(a^* a) \geq 0$ porque φ es positiva. Entonces $[,]$ es una forma sesquilineal semidefinida positiva.
- (5) Como $[,]_\varphi$ es una forma sesquilineal semidefinida positiva, vale la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

Continuación de la prueba.

- (2) Como a es autoadjunto se puede escribir $a = a_+ - a_-$, con $a_+, a_- \in A_+$. Entonces $\varphi(a) = \varphi(a_+) - \varphi(a_-) \in [0, \infty) - [0, \infty) = \mathbb{R}$.
- (3) Se tiene $\varphi(a) = \varphi(\operatorname{Re} a) + i\varphi(\operatorname{Im} a)$, y como $\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a \in \mathbb{R}$, sigue que que $\overline{\varphi(a)} = \varphi(\operatorname{Re} a) - i\varphi(\operatorname{Im} a) = \varphi(\operatorname{Re} a - i\operatorname{Im} a) = \varphi(a^*)$.
- (4) Es claro que $(a, b) \mapsto [a, b]_\varphi = \varphi(b^* a)$ es lineal en la primera variable y conjugado-lineal en la segunda variable. Además $[a, a]_\varphi = \varphi(a^* a) \geq 0$ porque φ es positiva. Entonces $[,]$ es una forma sesquilineal semidefinida positiva.
- (5) Como $[,]_\varphi$ es una forma sesquilineal semidefinida positiva, vale la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$|[a, b]_\varphi| \leq [a, a]_\varphi [b, b]_\varphi,$$

Continuación de la prueba.

- (2) Como a es autoadjunto se puede escribir $a = a_+ - a_-$, con $a_+, a_- \in A_+$. Entonces $\varphi(a) = \varphi(a_+) - \varphi(a_-) \in [0, \infty) - [0, \infty) = \mathbb{R}$.
- (3) Se tiene $\varphi(a) = \varphi(\operatorname{Re} a) + i\varphi(\operatorname{Im} a)$, y como $\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a \in \mathbb{R}$, sigue que que $\overline{\varphi(a)} = \varphi(\operatorname{Re} a) - i\varphi(\operatorname{Im} a) = \varphi(\operatorname{Re} a - i\operatorname{Im} a) = \varphi(a^*)$.
- (4) Es claro que $(a, b) \mapsto [a, b]_\varphi = \varphi(b^* a)$ es lineal en la primera variable y conjugado-lineal en la segunda variable. Además $[a, a]_\varphi = \varphi(a^* a) \geq 0$ porque φ es positiva. Entonces $[,]$ es una forma sesquilineal semidefinida positiva.
- (5) Como $[,]_\varphi$ es una forma sesquilineal semidefinida positiva, vale la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$|[a, b]_\varphi| \leq [a, a]_\varphi [b, b]_\varphi, \text{ o sea } |\varphi(b^* a)|^2 \leq \varphi(a^* a) \varphi(b^* b).$$

Continuación de la prueba.

- (2) Como a es autoadjunto se puede escribir $a = a_+ - a_-$, con $a_+, a_- \in A_+$. Entonces $\varphi(a) = \varphi(a_+) - \varphi(a_-) \in [0, \infty) - [0, \infty) = \mathbb{R}$.
- (3) Se tiene $\varphi(a) = \varphi(\operatorname{Re} a) + i\varphi(\operatorname{Im} a)$, y como $\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a \in \mathbb{R}$, sigue que que $\overline{\varphi(a)} = \varphi(\operatorname{Re} a) - i\varphi(\operatorname{Im} a) = \varphi(\operatorname{Re} a - i\operatorname{Im} a) = \varphi(a^*)$.
- (4) Es claro que $(a, b) \mapsto [a, b]_\varphi = \varphi(b^* a)$ es lineal en la primera variable y conjugado-lineal en la segunda variable. Además $[a, a]_\varphi = \varphi(a^* a) \geq 0$ porque φ es positiva. Entonces $[,]$ es una forma sesquilineal semidefinida positiva.
- (5) Como $[,]_\varphi$ es una forma sesquilineal semidefinida positiva, vale la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$|[a, b]_\varphi| \leq [a, a]_\varphi [b, b]_\varphi, \text{ o sea } |\varphi(b^* a)|^2 \leq \varphi(a^* a) \varphi(b^* b).$$

En particular si (u_λ) es una unidad aproximada para A ,

Continuación de la prueba.

- (2) Como a es autoadjunto se puede escribir $a = a_+ - a_-$, con $a_+, a_- \in A_+$. Entonces $\varphi(a) = \varphi(a_+) - \varphi(a_-) \in [0, \infty) - [0, \infty) = \mathbb{R}$.
- (3) Se tiene $\varphi(a) = \varphi(\operatorname{Re} a) + i\varphi(\operatorname{Im} a)$, y como $\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a \in \mathbb{R}$, sigue que que $\overline{\varphi(a)} = \varphi(\operatorname{Re} a) - i\varphi(\operatorname{Im} a) = \varphi(\operatorname{Re} a - i\operatorname{Im} a) = \varphi(a^*)$.
- (4) Es claro que $(a, b) \mapsto [a, b]_\varphi = \varphi(b^* a)$ es lineal en la primera variable y conjugado-lineal en la segunda variable. Además $[a, a]_\varphi = \varphi(a^* a) \geq 0$ porque φ es positiva. Entonces $[,]$ es una forma sesquilineal semidefinida positiva.
- (5) Como $[,]_\varphi$ es una forma sesquilineal semidefinida positiva, vale la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$|[a, b]_\varphi| \leq [a, a]_\varphi [b, b]_\varphi, \text{ o sea } |\varphi(b^* a)|^2 \leq \varphi(a^* a) \varphi(b^* b).$$

En particular si (u_λ) es una unidad aproximada para A , se tiene que:

Continuación de la prueba.

- (2) Como a es autoadjunto se puede escribir $a = a_+ - a_-$, con $a_+, a_- \in A_+$. Entonces $\varphi(a) = \varphi(a_+) - \varphi(a_-) \in [0, \infty) - [0, \infty) = \mathbb{R}$.
- (3) Se tiene $\varphi(a) = \varphi(\operatorname{Re} a) + i\varphi(\operatorname{Im} a)$, y como $\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a \in \mathbb{R}$, sigue que que $\overline{\varphi(a)} = \varphi(\operatorname{Re} a) - i\varphi(\operatorname{Im} a) = \varphi(\operatorname{Re} a - i\operatorname{Im} a) = \varphi(a^*)$.
- (4) Es claro que $(a, b) \mapsto [a, b]_\varphi = \varphi(b^* a)$ es lineal en la primera variable y conjugado-lineal en la segunda variable. Además $[a, a]_\varphi = \varphi(a^* a) \geq 0$ porque φ es positiva. Entonces $[,]$ es una forma sesquilineal semidefinida positiva.
- (5) Como $[,]_\varphi$ es una forma sesquilineal semidefinida positiva, vale la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$|[a, b]_\varphi| \leq [a, a]_\varphi [b, b]_\varphi, \text{ o sea } |\varphi(b^* a)|^2 \leq \varphi(a^* a) \varphi(b^* b).$$

En particular si (u_λ) es una unidad aproximada para A , se tiene que:

$$|\varphi(a)|^2 = \lim_{\lambda} |\varphi(u_\lambda a)|^2$$

Continuación de la prueba.

- (2) Como a es autoadjunto se puede escribir $a = a_+ - a_-$, con $a_+, a_- \in A_+$. Entonces $\varphi(a) = \varphi(a_+) - \varphi(a_-) \in [0, \infty) - [0, \infty) = \mathbb{R}$.
- (3) Se tiene $\varphi(a) = \varphi(\operatorname{Re} a) + i\varphi(\operatorname{Im} a)$, y como $\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a \in \mathbb{R}$, sigue que que $\overline{\varphi(a)} = \varphi(\operatorname{Re} a) - i\varphi(\operatorname{Im} a) = \varphi(\operatorname{Re} a - i\operatorname{Im} a) = \varphi(a^*)$.
- (4) Es claro que $(a, b) \mapsto [a, b]_\varphi = \varphi(b^* a)$ es lineal en la primera variable y conjugado-lineal en la segunda variable. Además $[a, a]_\varphi = \varphi(a^* a) \geq 0$ porque φ es positiva. Entonces $[,]$ es una forma sesquilineal semidefinida positiva.
- (5) Como $[,]_\varphi$ es una forma sesquilineal semidefinida positiva, vale la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$|[a, b]_\varphi| \leq [a, a]_\varphi [b, b]_\varphi, \text{ o sea } |\varphi(b^* a)|^2 \leq \varphi(a^* a) \varphi(b^* b).$$

En particular si (u_λ) es una unidad aproximada para A , se tiene que:

$$|\varphi(a)|^2 = \lim_{\lambda} |\varphi(u_\lambda a)|^2 \leq \overline{\lim_{\lambda}} \varphi(a^* a) \varphi(u_\lambda^2)$$

Continuación de la prueba.

- (2) Como a es autoadjunto se puede escribir $a = a_+ - a_-$, con $a_+, a_- \in A_+$. Entonces $\varphi(a) = \varphi(a_+) - \varphi(a_-) \in [0, \infty) - [0, \infty) = \mathbb{R}$.
- (3) Se tiene $\varphi(a) = \varphi(\operatorname{Re} a) + i\varphi(\operatorname{Im} a)$, y como $\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a \in \mathbb{R}$, sigue que que $\overline{\varphi(a)} = \varphi(\operatorname{Re} a) - i\varphi(\operatorname{Im} a) = \varphi(\operatorname{Re} a - i\operatorname{Im} a) = \varphi(a^*)$.
- (4) Es claro que $(a, b) \mapsto [a, b]_\varphi = \varphi(b^* a)$ es lineal en la primera variable y conjugado-lineal en la segunda variable. Además $[a, a]_\varphi = \varphi(a^* a) \geq 0$ porque φ es positiva. Entonces $[,]$ es una forma sesquilineal semidefinida positiva.
- (5) Como $[,]_\varphi$ es una forma sesquilineal semidefinida positiva, vale la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$|[a, b]_\varphi| \leq [a, a]_\varphi [b, b]_\varphi, \text{ o sea } |\varphi(b^* a)|^2 \leq \varphi(a^* a) \varphi(b^* b).$$

En particular si (u_λ) es una unidad aproximada para A , se tiene que:

$$|\varphi(a)|^2 = \lim_{\lambda} |\varphi(u_\lambda a)|^2 \leq \overline{\lim_{\lambda}} \varphi(a^* a) \varphi(u_\lambda^2) \leq \|\varphi\| \varphi(a^* a),$$

Continuación de la prueba.

- (2) Como a es autoadjunto se puede escribir $a = a_+ - a_-$, con $a_+, a_- \in A_+$. Entonces $\varphi(a) = \varphi(a_+) - \varphi(a_-) \in [0, \infty) - [0, \infty) = \mathbb{R}$.
- (3) Se tiene $\varphi(a) = \varphi(\operatorname{Re} a) + i\varphi(\operatorname{Im} a)$, y como $\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a \in \mathbb{R}$, sigue que que $\overline{\varphi(a)} = \varphi(\operatorname{Re} a) - i\varphi(\operatorname{Im} a) = \varphi(\operatorname{Re} a - i\operatorname{Im} a) = \varphi(a^*)$.
- (4) Es claro que $(a, b) \mapsto [a, b]_\varphi = \varphi(b^* a)$ es lineal en la primera variable y conjugado-lineal en la segunda variable. Además $[a, a]_\varphi = \varphi(a^* a) \geq 0$ porque φ es positiva. Entonces $[,]$ es una forma sesquilineal semidefinida positiva.
- (5) Como $[,]_\varphi$ es una forma sesquilineal semidefinida positiva, vale la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$|[a, b]_\varphi| \leq [a, a]_\varphi [b, b]_\varphi, \text{ o sea } |\varphi(b^* a)|^2 \leq \varphi(a^* a) \varphi(b^* b).$$

En particular si (u_λ) es una unidad aproximada para A , se tiene que:

$$|\varphi(a)|^2 = \lim_{\lambda} |\varphi(u_\lambda a)|^2 \leq \overline{\lim_{\lambda}} \varphi(a^* a) \varphi(u_\lambda^2) \leq \|\varphi\| \varphi(a^* a),$$

porque $\varphi(u_\lambda)^2 \leq \|\varphi\|$.

Continuación de la prueba.

(6) Sea $\tilde{\varphi}$ una extensión lineal de φ .

Continuación de la prueba.

(6) Sea $\tilde{\varphi}$ una extensión lineal de φ .

Continuación de la prueba.

(6) Sea $\tilde{\varphi}$ una extensión lineal de φ . Entonces $\tilde{\varphi}(a + \lambda) = \varphi(a) + \lambda\tilde{\varphi}(1)$.

Continuación de la prueba.

(6) Sea $\tilde{\varphi}$ una extensión lineal de φ . Entonces $\tilde{\varphi}(a + \lambda) = \varphi(a) + \lambda\tilde{\varphi}(1)$. Para que $\tilde{\varphi} \geq 0$ es necesario que:

Continuación de la prueba.

(6) Sea $\tilde{\varphi}$ una extensión lineal de φ . Entonces $\tilde{\varphi}(a + \lambda) = \varphi(a) + \lambda\tilde{\varphi}(1)$. Para que $\tilde{\varphi} \geq 0$ es necesario que: $\tilde{\varphi}((a + \lambda)^*(a + \lambda)) \geq 0$,

Continuación de la prueba.

(6) Sea $\tilde{\varphi}$ una extensión lineal de φ . Entonces $\tilde{\varphi}(a + \lambda) = \varphi(a) + \lambda\tilde{\varphi}(1)$. Para que $\tilde{\varphi} \geq 0$ es necesario que: $\tilde{\varphi}((a + \lambda)^*(a + \lambda)) \geq 0$, para todo $a \in A$ y $\lambda \in \mathbb{C}$.

Continuación de la prueba.

(6) Sea $\tilde{\varphi}$ una extensión lineal de φ . Entonces $\tilde{\varphi}(a + \lambda) = \varphi(a) + \lambda\tilde{\varphi}(1)$. Para que $\tilde{\varphi} \geq 0$ es necesario que: $\tilde{\varphi}((a + \lambda)^*(a + \lambda)) \geq 0$, para todo $a \in A$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Ahora:

Continuación de la prueba.

(6) Sea $\tilde{\varphi}$ una extensión lineal de φ . Entonces $\tilde{\varphi}(a + \lambda) = \varphi(a) + \lambda\tilde{\varphi}(1)$. Para que $\tilde{\varphi} \geq 0$ es necesario que: $\tilde{\varphi}((a + \lambda)^*(a + \lambda)) \geq 0$, para todo $a \in A$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Ahora:

$$\tilde{\varphi}((a + \lambda)^*(a + \lambda)) = \tilde{\varphi}(a^*a + \lambda a^* + \bar{\lambda}a + |\lambda|^2)$$

Continuación de la prueba.

(6) Sea $\tilde{\varphi}$ una extensión lineal de φ . Entonces $\tilde{\varphi}(a + \lambda) = \varphi(a) + \lambda\tilde{\varphi}(1)$. Para que $\tilde{\varphi} \geq 0$ es necesario que: $\tilde{\varphi}((a + \lambda)^*(a + \lambda)) \geq 0$, para todo $a \in A$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Ahora:

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}((a + \lambda)^*(a + \lambda)) &= \tilde{\varphi}(a^*a + \lambda a^* + \bar{\lambda}a + |\lambda|^2) \\ &= \varphi(a^*a) + \bar{\lambda}\varphi(a) + (\overline{\lambda\varphi(a)}) + |\lambda|^2\tilde{\varphi}(1)\end{aligned}$$

Continuación de la prueba.

(6) Sea $\tilde{\varphi}$ una extensión lineal de φ . Entonces $\tilde{\varphi}(a + \lambda) = \varphi(a) + \lambda\tilde{\varphi}(1)$. Para que $\tilde{\varphi} \geq 0$ es necesario que: $\tilde{\varphi}((a + \lambda)^*(a + \lambda)) \geq 0$, para todo $a \in A$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Ahora:

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}((a + \lambda)^*(a + \lambda)) &= \tilde{\varphi}(a^*a + \lambda a^* + \bar{\lambda}a + |\lambda|^2) \\ &= \varphi(a^*a) + \bar{\lambda}\varphi(a) + (\overline{\bar{\lambda}\varphi(a)}) + |\lambda|^2\tilde{\varphi}(1) \\ &= \varphi(a^*a) + 2\operatorname{Re}(\bar{\lambda}\varphi(a)) + |\lambda|^2\tilde{\varphi}(1)\end{aligned}$$

Continuación de la prueba.

(6) Sea $\tilde{\varphi}$ una extensión lineal de φ . Entonces $\tilde{\varphi}(a + \lambda) = \varphi(a) + \lambda\tilde{\varphi}(1)$. Para que $\tilde{\varphi} \geq 0$ es necesario que: $\tilde{\varphi}((a + \lambda)^*(a + \lambda)) \geq 0$, para todo $a \in A$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Ahora:

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}((a + \lambda)^*(a + \lambda)) &= \tilde{\varphi}(a^*a + \lambda a^* + \bar{\lambda}a + |\lambda|^2) \\ &= \varphi(a^*a) + \bar{\lambda}\varphi(a) + (\overline{\bar{\lambda}\varphi(a)}) + |\lambda|^2\tilde{\varphi}(1) \\ &= \varphi(a^*a) + 2\operatorname{Re}(\bar{\lambda}\varphi(a)) + |\lambda|^2\tilde{\varphi}(1) \\ &\geq \varphi(a^*a) - 2|\lambda||\varphi(a)| + |\lambda|^2\tilde{\varphi}(1)\end{aligned}$$

Continuación de la prueba.

(6) Sea $\tilde{\varphi}$ una extensión lineal de φ . Entonces $\tilde{\varphi}(a + \lambda) = \varphi(a) + \lambda\tilde{\varphi}(1)$. Para que $\tilde{\varphi} \geq 0$ es necesario que: $\tilde{\varphi}((a + \lambda)^*(a + \lambda)) \geq 0$, para todo $a \in A$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Ahora:

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}((a + \lambda)^*(a + \lambda)) &= \tilde{\varphi}(a^*a + \lambda a^* + \bar{\lambda}a + |\lambda|^2) \\&= \varphi(a^*a) + \bar{\lambda}\varphi(a) + (\overline{\bar{\lambda}\varphi(a)}) + |\lambda|^2\tilde{\varphi}(1) \\&= \varphi(a^*a) + 2\operatorname{Re}(\bar{\lambda}\varphi(a)) + |\lambda|^2\tilde{\varphi}(1) \\&\geq \varphi(a^*a) - 2|\lambda||\varphi(a)| + |\lambda|^2\tilde{\varphi}(1) \\&\geq \frac{1}{\|\varphi\|} [|\varphi(a)|^2 - 2|\lambda||\varphi(a)|\|\varphi\| + |\lambda|^2\|\varphi\|\tilde{\varphi}(1)]\end{aligned}$$

Continuación de la prueba.

(6) Sea $\tilde{\varphi}$ una extensión lineal de φ . Entonces $\tilde{\varphi}(a + \lambda) = \varphi(a) + \lambda\tilde{\varphi}(1)$. Para que $\tilde{\varphi} \geq 0$ es necesario que: $\tilde{\varphi}((a + \lambda)^*(a + \lambda)) \geq 0$, para todo $a \in A$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Ahora:

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}((a + \lambda)^*(a + \lambda)) &= \tilde{\varphi}(a^*a + \lambda a^* + \bar{\lambda}a + |\lambda|^2) \\&= \varphi(a^*a) + \bar{\lambda}\varphi(a) + (\overline{\bar{\lambda}\varphi(a)}) + |\lambda|^2\tilde{\varphi}(1) \\&= \varphi(a^*a) + 2\operatorname{Re}(\bar{\lambda}\varphi(a)) + |\lambda|^2\tilde{\varphi}(1) \\&\geq \varphi(a^*a) - 2|\lambda||\varphi(a)| + |\lambda|^2\tilde{\varphi}(1) \\&\geq \frac{1}{\|\varphi\|} [|\varphi(a)|^2 - 2|\lambda||\varphi(a)|\|\varphi\| + |\lambda|^2\|\varphi\|\tilde{\varphi}(1)] \\&= \frac{1}{\|\varphi\|} [(|\varphi(a)| - |\lambda|\|\varphi\|)^2 - |\lambda|^2\|\varphi\|^2 + |\lambda|^2\|\varphi\|\tilde{\varphi}(1)]\end{aligned}$$

Continuación de la prueba.

(6) Sea $\tilde{\varphi}$ una extensión lineal de φ . Entonces $\tilde{\varphi}(a + \lambda) = \varphi(a) + \lambda\tilde{\varphi}(1)$. Para que $\tilde{\varphi} \geq 0$ es necesario que: $\tilde{\varphi}((a + \lambda)^*(a + \lambda)) \geq 0$, para todo $a \in A$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Ahora:

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}((a + \lambda)^*(a + \lambda)) &= \tilde{\varphi}(a^*a + \lambda a^* + \bar{\lambda}a + |\lambda|^2) \\&= \varphi(a^*a) + \bar{\lambda}\varphi(a) + (\overline{\bar{\lambda}\varphi(a)}) + |\lambda|^2\tilde{\varphi}(1) \\&= \varphi(a^*a) + 2\operatorname{Re}(\bar{\lambda}\varphi(a)) + |\lambda|^2\tilde{\varphi}(1) \\&\geq \varphi(a^*a) - 2|\lambda||\varphi(a)| + |\lambda|^2\tilde{\varphi}(1) \\&\geq \frac{1}{\|\varphi\|} [|\varphi(a)|^2 - 2|\lambda||\varphi(a)|\|\varphi\| + |\lambda|^2\|\varphi\|\tilde{\varphi}(1)] \\&= \frac{1}{\|\varphi\|} [(|\varphi(a)| - |\lambda|\|\varphi\|)^2 - |\lambda|^2\|\varphi\|^2 + |\lambda|^2\|\varphi\|\tilde{\varphi}(1)] \\&= \frac{1}{\|\varphi\|} [(|\varphi(a)| - |\lambda|\|\varphi\|)^2 + |\lambda|^2\|\varphi\|(\tilde{\varphi}(1) - \|\varphi\|)]\end{aligned}$$

Continuación de la prueba.

(6) Sea $\tilde{\varphi}$ una extensión lineal de φ . Entonces $\tilde{\varphi}(a + \lambda) = \varphi(a) + \lambda\tilde{\varphi}(1)$. Para que $\tilde{\varphi} \geq 0$ es necesario que: $\tilde{\varphi}((a + \lambda)^*(a + \lambda)) \geq 0$, para todo $a \in A$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Ahora:

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}((a + \lambda)^*(a + \lambda)) &= \tilde{\varphi}(a^*a + \lambda a^* + \bar{\lambda}a + |\lambda|^2) \\&= \varphi(a^*a) + \bar{\lambda}\varphi(a) + (\overline{\lambda\varphi(a)}) + |\lambda|^2\tilde{\varphi}(1) \\&= \varphi(a^*a) + 2\operatorname{Re}(\bar{\lambda}\varphi(a)) + |\lambda|^2\tilde{\varphi}(1) \\&\geq \varphi(a^*a) - 2|\lambda||\varphi(a)| + |\lambda|^2\tilde{\varphi}(1) \\&\geq \frac{1}{\|\varphi\|} [|\varphi(a)|^2 - 2|\lambda||\varphi(a)|\|\varphi\| + |\lambda|^2\|\varphi\|\tilde{\varphi}(1)] \\&= \frac{1}{\|\varphi\|} [(|\varphi(a)| - |\lambda|\|\varphi\|)^2 - |\lambda|^2\|\varphi\|^2 + |\lambda|^2\|\varphi\|\tilde{\varphi}(1)] \\&= \frac{1}{\|\varphi\|} [(|\varphi(a)| - |\lambda|\|\varphi\|)^2 + |\lambda|^2\|\varphi\|(\tilde{\varphi}(1) - \|\varphi\|)]\end{aligned}$$

Si se toma $\tilde{\varphi}(1) \geq \|\varphi\|$, tenemos que $\tilde{\varphi}$ es positiva.

Construcción GNS: Gelfand-Naimark-Segal

Teorema (Construcción GNS: Gelfand-Naimark-Segal)

Sea $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funcional positiva.

Construcción GNS: Gelfand-Naimark-Segal

Teorema (Construcción GNS: Gelfand-Naimark-Segal)

Sea $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funcional positiva.

Construcción GNS: Gelfand-Naimark-Segal

Teorema (Construcción GNS: Gelfand-Naimark-Segal)

Sea $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funcional positiva. Entonces existe una terna $(\mathcal{H}, \xi, \pi)$,

Construcción GNS: Gelfand-Naimark-Segal

Teorema (Construcción GNS: Gelfand-Naimark-Segal)

Sea $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funcional positiva. Entonces existe una terna $(\mathcal{H}, \xi, \pi)$, donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert

Construcción GNS: Gelfand-Naimark-Segal

Teorema (Construcción GNS: Gelfand-Naimark-Segal)

Sea $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funcional positiva. Entonces existe una terna $(\mathcal{H}, \xi, \pi)$, donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert y $\pi : A \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es una representación cíclica con vector cíclico ξ ,

Construcción GNS: Gelfand-Naimark-Segal

Teorema (Construcción GNS: Gelfand-Naimark-Segal)

Sea $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funcional positiva. Entonces existe una terna $(\mathcal{H}, \xi, \pi)$, donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert y $\pi : A \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es una representación cíclica con vector cíclico ξ , tal que $\varphi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle$ para todo $a \in A$.

Construcción GNS: Gelfand-Naimark-Segal

Teorema (Construcción GNS: Gelfand-Naimark-Segal)

Sea $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funcional positiva. Entonces existe una terna $(\mathcal{H}, \xi, \pi)$, donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert y $\pi : A \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es una representación cíclica con vector cíclico ξ , tal que $\varphi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle$ para todo $a \in A$. Además, si $(\mathcal{K}, \eta, \rho)$ es otra tal terna,

Construcción GNS: Gelfand-Naimark-Segal

Teorema (Construcción GNS: Gelfand-Naimark-Segal)

Sea $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funcional positiva. Entonces existe una terna $(\mathcal{H}, \xi, \pi)$, donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert y $\pi : A \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es una representación cíclica con vector cíclico ξ , tal que $\varphi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle$ para todo $a \in A$. Además, si $(\mathcal{K}, \eta, \rho)$ es otra tal terna, entonces existe un isomorfismo $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$,

Construcción GNS: Gelfand-Naimark-Segal

Teorema (Construcción GNS: Gelfand-Naimark-Segal)

Sea $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funcional positiva. Entonces existe una terna $(\mathcal{H}, \xi, \pi)$, donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert y $\pi : A \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es una representación cíclica con vector cíclico ξ , tal que $\varphi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle$ para todo $a \in A$. Además, si $(\mathcal{K}, \eta, \rho)$ es otra tal terna, entonces existe un isomorfismo $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$, único tal que $U\xi = \eta$

Construcción GNS: Gelfand-Naimark-Segal

Teorema (Construcción GNS: Gelfand-Naimark-Segal)

Sea $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funcional positiva. Entonces existe una terna $(\mathcal{H}, \xi, \pi)$, donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert y $\pi : A \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es una representación cíclica con vector cíclico ξ , tal que $\varphi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle$ para todo $a \in A$. Además, si $(\mathcal{K}, \eta, \rho)$ es otra tal terna, entonces existe un isomorfismo $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$, único tal que $U\xi = \eta$ y $\rho(a) = U\pi(a)U^*$, para todo $a \in A$.

Construcción GNS: Gelfand-Naimark-Segal

Teorema (Construcción GNS: Gelfand-Naimark-Segal)

Sea $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funcional positiva. Entonces existe una terna $(\mathcal{H}, \xi, \pi)$, donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert y $\pi : A \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es una representación cíclica con vector cíclico ξ , tal que $\varphi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle$ para todo $a \in A$. Además, si $(\mathcal{K}, \eta, \rho)$ es otra tal terna, entonces existe un isomorfismo $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$, único tal que $U\xi = \eta$ y $\rho(a) = U\pi(a)U^$, para todo $a \in A$.*

Demostración.

Construcción GNS: Gelfand-Naimark-Segal

Teorema (Construcción GNS: Gelfand-Naimark-Segal)

Sea $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funcional positiva. Entonces existe una terna $(\mathcal{H}, \xi, \pi)$, donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert y $\pi : A \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es una representación cíclica con vector cíclico ξ , tal que $\varphi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle$ para todo $a \in A$. Además, si $(\mathcal{K}, \eta, \rho)$ es otra tal terna, entonces existe un isomorfismo $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$, único tal que $U\xi = \eta$ y $\rho(a) = U\pi(a)U^$, para todo $a \in A$.*

Demostración.

Construcción GNS: Gelfand-Naimark-Segal

Teorema (Construcción GNS: Gelfand-Naimark-Segal)

Sea $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funcional positiva. Entonces existe una terna $(\mathcal{H}, \xi, \pi)$, donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert y $\pi : A \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es una representación cíclica con vector cíclico ξ , tal que $\varphi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle$ para todo $a \in A$. Además, si $(\mathcal{K}, \eta, \rho)$ es otra tal terna, entonces existe un isomorfismo $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$, único tal que $U\xi = \eta$ y $\rho(a) = U\pi(a)U^*$, para todo $a \in A$.

Demostración.

Unicidad:

Construcción GNS: Gelfand-Naimark-Segal

Teorema (Construcción GNS: Gelfand-Naimark-Segal)

Sea $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funcional positiva. Entonces existe una terna $(\mathcal{H}, \xi, \pi)$, donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert y $\pi : A \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es una representación cíclica con vector cíclico ξ , tal que $\varphi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle$ para todo $a \in A$. Además, si $(\mathcal{K}, \eta, \rho)$ es otra tal terna, entonces existe un isomorfismo $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$, único tal que $U\xi = \eta$ y $\rho(a) = U\pi(a)U^$, para todo $a \in A$.*

Demostración.

Unicidad: Supongamos que $(\mathcal{H}, \xi, \pi)$ y $(\mathcal{K}, \eta, \rho)$ son dos ternas como las que anuncia el teorema.

Construcción GNS: Gelfand-Naimark-Segal

Teorema (Construcción GNS: Gelfand-Naimark-Segal)

Sea $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funcional positiva. Entonces existe una terna $(\mathcal{H}, \xi, \pi)$, donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert y $\pi : A \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es una representación cíclica con vector cíclico ξ , tal que $\varphi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle$ para todo $a \in A$. Además, si $(\mathcal{K}, \eta, \rho)$ es otra tal terna, entonces existe un isomorfismo $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$, único tal que $U\xi = \eta$ y $\rho(a) = U\pi(a)U^*$, para todo $a \in A$.

Demostración.

Unicidad: Supongamos que $(\mathcal{H}, \xi, \pi)$ y $(\mathcal{K}, \eta, \rho)$ son dos ternas como las que anuncia el teorema. Si $a \in A$, entonces

Construcción GNS: Gelfand-Naimark-Segal

Teorema (Construcción GNS: Gelfand-Naimark-Segal)

Sea $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funcional positiva. Entonces existe una terna $(\mathcal{H}, \xi, \pi)$, donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert y $\pi : A \rightarrow B(\mathcal{H})$ es una representación cíclica con vector cíclico ξ , tal que $\varphi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle$ para todo $a \in A$. Además, si $(\mathcal{K}, \eta, \rho)$ es otra tal terna, entonces existe un isomorfismo $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$, único tal que $U\xi = \eta$ y $\rho(a) = U\pi(a)U^*$, para todo $a \in A$.

Demostración.

Unicidad: Supongamos que $(\mathcal{H}, \xi, \pi)$ y $(\mathcal{K}, \eta, \rho)$ son dos ternas como las que anuncia el teorema. Si $a \in A$, entonces

$$\|\pi(a)\xi\|^2 = \langle \pi(a)\xi, \pi(a)\xi \rangle$$

Construcción GNS: Gelfand-Naimark-Segal

Teorema (Construcción GNS: Gelfand-Naimark-Segal)

Sea $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funcional positiva. Entonces existe una terna $(\mathcal{H}, \xi, \pi)$, donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert y $\pi : A \rightarrow B(\mathcal{H})$ es una representación cíclica con vector cíclico ξ , tal que $\varphi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle$ para todo $a \in A$. Además, si $(\mathcal{K}, \eta, \rho)$ es otra tal terna, entonces existe un isomorfismo $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$, único tal que $U\xi = \eta$ y $\rho(a) = U\pi(a)U^*$, para todo $a \in A$.

Demostración.

Unicidad: Supongamos que $(\mathcal{H}, \xi, \pi)$ y $(\mathcal{K}, \eta, \rho)$ son dos ternas como las que anuncia el teorema. Si $a \in A$, entonces

$$\|\pi(a)\xi\|^2 = \langle \pi(a)\xi, \pi(a)\xi \rangle = \langle \pi(a^*a)\xi, \xi \rangle$$

Construcción GNS: Gelfand-Naimark-Segal

Teorema (Construcción GNS: Gelfand-Naimark-Segal)

Sea $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funcional positiva. Entonces existe una terna $(\mathcal{H}, \xi, \pi)$, donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert y $\pi : A \rightarrow B(\mathcal{H})$ es una representación cíclica con vector cíclico ξ , tal que $\varphi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle$ para todo $a \in A$. Además, si $(\mathcal{K}, \eta, \rho)$ es otra tal terna, entonces existe un isomorfismo $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$, único tal que $U\xi = \eta$ y $\rho(a) = U\pi(a)U^*$, para todo $a \in A$.

Demostración.

Unicidad: Supongamos que $(\mathcal{H}, \xi, \pi)$ y $(\mathcal{K}, \eta, \rho)$ son dos ternas como las que anuncia el teorema. Si $a \in A$, entonces

$$\|\pi(a)\xi\|^2 = \langle \pi(a)\xi, \pi(a)\xi \rangle = \langle \pi(a^*a)\xi, \xi \rangle = \varphi(a^*a)$$

Construcción GNS: Gelfand-Naimark-Segal

Teorema (Construcción GNS: Gelfand-Naimark-Segal)

Sea $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funcional positiva. Entonces existe una terna $(\mathcal{H}, \xi, \pi)$, donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert y $\pi : A \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es una representación cíclica con vector cíclico ξ , tal que $\varphi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle$ para todo $a \in A$. Además, si $(\mathcal{K}, \eta, \rho)$ es otra tal terna, entonces existe un isomorfismo $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$, único tal que $U\xi = \eta$ y $\rho(a) = U\pi(a)U^*$, para todo $a \in A$.

Demostración.

Unicidad: Supongamos que $(\mathcal{H}, \xi, \pi)$ y $(\mathcal{K}, \eta, \rho)$ son dos ternas como las que anuncia el teorema. Si $a \in A$, entonces

$$\begin{aligned}\|\pi(a)\xi\|^2 &= \langle \pi(a)\xi, \pi(a)\xi \rangle = \langle \pi(a^*a)\xi, \xi \rangle = \varphi(a^*a) \\ &= \langle \rho(a^*a)\eta, \eta \rangle\end{aligned}$$

Construcción GNS: Gelfand-Naimark-Segal

Teorema (Construcción GNS: Gelfand-Naimark-Segal)

Sea $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funcional positiva. Entonces existe una terna $(\mathcal{H}, \xi, \pi)$, donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert y $\pi : A \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es una representación cíclica con vector cíclico ξ , tal que $\varphi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle$ para todo $a \in A$. Además, si $(\mathcal{K}, \eta, \rho)$ es otra tal terna, entonces existe un isomorfismo $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$, único tal que $U\xi = \eta$ y $\rho(a) = U\pi(a)U^*$, para todo $a \in A$.

Demostración.

Unicidad: Supongamos que $(\mathcal{H}, \xi, \pi)$ y $(\mathcal{K}, \eta, \rho)$ son dos ternas como las que anuncia el teorema. Si $a \in A$, entonces

$$\begin{aligned}\|\pi(a)\xi\|^2 &= \langle \pi(a)\xi, \pi(a)\xi \rangle = \langle \pi(a^*a)\xi, \xi \rangle = \varphi(a^*a) \\ &= \langle \rho(a^*a)\eta, \eta \rangle = \langle \rho(a)\eta, \rho(a)\eta \rangle\end{aligned}$$

Construcción GNS: Gelfand-Naimark-Segal

Teorema (Construcción GNS: Gelfand-Naimark-Segal)

Sea $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funcional positiva. Entonces existe una terna $(\mathcal{H}, \xi, \pi)$, donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert y $\pi : A \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es una representación cíclica con vector cíclico ξ , tal que $\varphi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle$ para todo $a \in A$. Además, si $(\mathcal{K}, \eta, \rho)$ es otra tal terna, entonces existe un isomorfismo $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$, único tal que $U\xi = \eta$ y $\rho(a) = U\pi(a)U^*$, para todo $a \in A$.

Demostración.

Unicidad: Supongamos que $(\mathcal{H}, \xi, \pi)$ y $(\mathcal{K}, \eta, \rho)$ son dos ternas como las que anuncia el teorema. Si $a \in A$, entonces

$$\begin{aligned}\|\pi(a)\xi\|^2 &= \langle \pi(a)\xi, \pi(a)\xi \rangle = \langle \pi(a^*a)\xi, \xi \rangle = \varphi(a^*a) \\ &= \langle \rho(a^*a)\eta, \eta \rangle = \langle \rho(a)\eta, \rho(a)\eta \rangle = \|\rho(a)\eta\|^2.\end{aligned}$$

Construcción GNS: Gelfand-Naimark-Segal

Teorema (Construcción GNS: Gelfand-Naimark-Segal)

Sea $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funcional positiva. Entonces existe una terna $(\mathcal{H}, \xi, \pi)$, donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert y $\pi : A \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es una representación cíclica con vector cíclico ξ , tal que $\varphi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle$ para todo $a \in A$. Además, si $(\mathcal{K}, \eta, \rho)$ es otra tal terna, entonces existe un isomorfismo $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$, único tal que $U\xi = \eta$ y $\rho(a) = U\pi(a)U^*$, para todo $a \in A$.

Demostración.

Unicidad: Supongamos que $(\mathcal{H}, \xi, \pi)$ y $(\mathcal{K}, \eta, \rho)$ son dos ternas como las que anuncia el teorema. Si $a \in A$, entonces

$$\begin{aligned}\|\pi(a)\xi\|^2 &= \langle \pi(a)\xi, \pi(a)\xi \rangle = \langle \pi(a^*a)\xi, \xi \rangle = \varphi(a^*a) \\ &= \langle \rho(a^*a)\eta, \eta \rangle = \langle \rho(a)\eta, \rho(a)\eta \rangle = \|\rho(a)\eta\|^2.\end{aligned}$$

Entonces $U : \pi(A)\xi \rightarrow \rho(A)\eta$, tal que $U(\pi(a)\xi) := \rho(a)\eta$,

Construcción GNS: Gelfand-Naimark-Segal

Teorema (Construcción GNS: Gelfand-Naimark-Segal)

Sea $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funcional positiva. Entonces existe una terna $(\mathcal{H}, \xi, \pi)$, donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert y $\pi : A \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es una representación cíclica con vector cíclico ξ , tal que $\varphi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle$ para todo $a \in A$. Además, si $(\mathcal{K}, \eta, \rho)$ es otra tal terna, entonces existe un isomorfismo $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$, único tal que $U\xi = \eta$ y $\rho(a) = U\pi(a)U^*$, para todo $a \in A$.

Demostración.

Unicidad: Supongamos que $(\mathcal{H}, \xi, \pi)$ y $(\mathcal{K}, \eta, \rho)$ son dos ternas como las que anuncia el teorema. Si $a \in A$, entonces

$$\begin{aligned}\|\pi(a)\xi\|^2 &= \langle \pi(a)\xi, \pi(a)\xi \rangle = \langle \pi(a^*a)\xi, \xi \rangle = \varphi(a^*a) \\ &= \langle \rho(a^*a)\eta, \eta \rangle = \langle \rho(a)\eta, \rho(a)\eta \rangle = \|\rho(a)\eta\|^2.\end{aligned}$$

Entonces $U : \pi(A)\xi \rightarrow \rho(A)\eta$, tal que $U(\pi(a)\xi) := \rho(a)\eta$, está bien definido

Construcción GNS: Gelfand-Naimark-Segal

Teorema (Construcción GNS: Gelfand-Naimark-Segal)

Sea $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funcional positiva. Entonces existe una terna $(\mathcal{H}, \xi, \pi)$, donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert y $\pi : A \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es una representación cíclica con vector cíclico ξ , tal que $\varphi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle$ para todo $a \in A$. Además, si $(\mathcal{K}, \eta, \rho)$ es otra tal terna, entonces existe un isomorfismo $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$, único tal que $U\xi = \eta$ y $\rho(a) = U\pi(a)U^*$, para todo $a \in A$.

Demostración.

Unicidad: Supongamos que $(\mathcal{H}, \xi, \pi)$ y $(\mathcal{K}, \eta, \rho)$ son dos ternas como las que anuncia el teorema. Si $a \in A$, entonces

$$\begin{aligned}\|\pi(a)\xi\|^2 &= \langle \pi(a)\xi, \pi(a)\xi \rangle = \langle \pi(a^*a)\xi, \xi \rangle = \varphi(a^*a) \\ &= \langle \rho(a^*a)\eta, \eta \rangle = \langle \rho(a)\eta, \rho(a)\eta \rangle = \|\rho(a)\eta\|^2.\end{aligned}$$

Entonces $U : \pi(A)\xi \rightarrow \rho(A)\eta$, tal que $U(\pi(a)\xi) := \rho(a)\eta$, está bien definido y es una isometría entre subespacios densos de $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$,

Construcción GNS: Gelfand-Naimark-Segal

Teorema (Construcción GNS: Gelfand-Naimark-Segal)

Sea $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funcional positiva. Entonces existe una terna $(\mathcal{H}, \xi, \pi)$, donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert y $\pi : A \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es una representación cíclica con vector cíclico ξ , tal que $\varphi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle$ para todo $a \in A$. Además, si $(\mathcal{K}, \eta, \rho)$ es otra tal terna, entonces existe un isomorfismo $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$, único tal que $U\xi = \eta$ y $\rho(a) = U\pi(a)U^*$, para todo $a \in A$.

Demostración.

Unicidad: Supongamos que $(\mathcal{H}, \xi, \pi)$ y $(\mathcal{K}, \eta, \rho)$ son dos ternas como las que anuncia el teorema. Si $a \in A$, entonces

$$\begin{aligned}\|\pi(a)\xi\|^2 &= \langle \pi(a)\xi, \pi(a)\xi \rangle = \langle \pi(a^*a)\xi, \xi \rangle = \varphi(a^*a) \\ &= \langle \rho(a^*a)\eta, \eta \rangle = \langle \rho(a)\eta, \rho(a)\eta \rangle = \|\rho(a)\eta\|^2.\end{aligned}$$

Entonces $U : \pi(A)\xi \rightarrow \rho(A)\eta$, tal que $U(\pi(a)\xi) := \rho(a)\eta$, está bien definido y es una isometría entre subespacios densos de $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$, de modo que se extiende de manera única a un isomorfismo entre $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$.

Construcción GNS: Gelfand-Naimark-Segal

Teorema (Construcción GNS: Gelfand-Naimark-Segal)

Sea $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funcional positiva. Entonces existe una terna $(\mathcal{H}, \xi, \pi)$, donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert y $\pi : A \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es una representación cíclica con vector cíclico ξ , tal que $\varphi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle$ para todo $a \in A$. Además, si $(\mathcal{K}, \eta, \rho)$ es otra tal terna, entonces existe un isomorfismo $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$, único tal que $U\xi = \eta$ y $\rho(a) = U\pi(a)U^*$, para todo $a \in A$.

Demostración.

Unicidad: Supongamos que $(\mathcal{H}, \xi, \pi)$ y $(\mathcal{K}, \eta, \rho)$ son dos ternas como las que anuncia el teorema. Si $a \in A$, entonces

$$\begin{aligned}\|\pi(a)\xi\|^2 &= \langle \pi(a)\xi, \pi(a)\xi \rangle = \langle \pi(a^*a)\xi, \xi \rangle = \varphi(a^*a) \\ &= \langle \rho(a^*a)\eta, \eta \rangle = \langle \rho(a)\eta, \rho(a)\eta \rangle = \|\rho(a)\eta\|^2.\end{aligned}$$

Entonces $U : \pi(A)\xi \rightarrow \rho(A)\eta$, tal que $U(\pi(a)\xi) := \rho(a)\eta$, está bien definido y es una isometría entre subespacios densos de $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$, de modo que se extiende de manera única a un isomorfismo entre $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$.

Construcción GNS: Gelfand-Naimark-Segal

Teorema (Construcción GNS: Gelfand-Naimark-Segal)

Sea $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funcional positiva. Entonces existe una terna $(\mathcal{H}, \xi, \pi)$, donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert y $\pi : A \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es una representación cíclica con vector cíclico ξ , tal que $\varphi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle$ para todo $a \in A$. Además, si $(\mathcal{K}, \eta, \rho)$ es otra tal terna, entonces existe un isomorfismo $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$, único tal que $U\xi = \eta$ y $\rho(a) = U\pi(a)U^*$, para todo $a \in A$.

Demostración.

Unicidad: Supongamos que $(\mathcal{H}, \xi, \pi)$ y $(\mathcal{K}, \eta, \rho)$ son dos ternas como las que anuncia el teorema. Si $a \in A$, entonces

$$\begin{aligned}\|\pi(a)\xi\|^2 &= \langle \pi(a)\xi, \pi(a)\xi \rangle = \langle \pi(a^*a)\xi, \xi \rangle = \varphi(a^*a) \\ &= \langle \rho(a^*a)\eta, \eta \rangle = \langle \rho(a)\eta, \rho(a)\eta \rangle = \|\rho(a)\eta\|^2.\end{aligned}$$

Entonces $U : \pi(A)\xi \rightarrow \rho(A)\eta$, tal que $U(\pi(a)\xi) := \rho(a)\eta$, está bien definido y es una isometría entre subespacios densos de $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$, de modo que se extiende de manera única a un isomorfismo entre $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$.

Continuación.

Las representaciones π y ρ son no degeneradas, ya que son cíclicas.

Continuación.

Las representaciones π y ρ son no degeneradas, ya que son cíclicas.

Continuación.

Las representaciones π y ρ son no degeneradas, ya que son cíclicas. Por lo tanto, si $(u_\lambda)_\lambda$ es una unidad aproximada de A y $a, a' \in A$, tendremos:

Continuación.

Las representaciones π y ρ son no degeneradas, ya que son cíclicas. Por lo tanto, si $(u_\lambda)_\lambda$ es una unidad aproximada de A y $a, a' \in A$, tendremos:

$$U\xi = U(\lim_{\lambda} \pi(u_\lambda)\xi)$$

Continuación.

Las representaciones π y ρ son no degeneradas, ya que son cíclicas. Por lo tanto, si $(u_\lambda)_\lambda$ es una unidad aproximada de A y $a, a' \in A$, tendremos:

$$U\xi = U(\lim_{\lambda} \pi(u_\lambda)\xi) = \lim_{\lambda} U\pi(u_\lambda)\xi$$

Continuación.

Las representaciones π y ρ son no degeneradas, ya que son cíclicas. Por lo tanto, si $(u_\lambda)_\lambda$ es una unidad aproximada de A y $a, a' \in A$, tendremos:

$$U\xi = U(\lim_{\lambda} \pi(u_\lambda)\xi) = \lim_{\lambda} U\pi(u_\lambda)\xi = \lim_{\lambda} \rho(u_\lambda)\eta$$

Continuación.

Las representaciones π y ρ son no degeneradas, ya que son cíclicas. Por lo tanto, si $(u_\lambda)_\lambda$ es una unidad aproximada de A y $a, a' \in A$, tendremos:

$$U\xi = U(\lim_{\lambda} \pi(u_\lambda)\xi) = \lim_{\lambda} U\pi(u_\lambda)\xi = \lim_{\lambda} \rho(u_\lambda)\eta = \eta.$$

Continuación.

Las representaciones π y ρ son no degeneradas, ya que son cíclicas. Por lo tanto, si $(u_\lambda)_\lambda$ es una unidad aproximada de A y $a, a' \in A$, tendremos:

$$U\xi = U(\lim_{\lambda} \pi(u_\lambda)\xi) = \lim_{\lambda} U\pi(u_\lambda)\xi = \lim_{\lambda} \rho(u_\lambda)\eta = \eta.$$

$$U(\pi(a)\pi(a')\xi) = U(\pi(aa')\xi)$$

Continuación.

Las representaciones π y ρ son no degeneradas, ya que son cíclicas. Por lo tanto, si $(u_\lambda)_\lambda$ es una unidad aproximada de A y $a, a' \in A$, tendremos:

$$U\xi = U(\lim_{\lambda} \pi(u_\lambda)\xi) = \lim_{\lambda} U\pi(u_\lambda)\xi = \lim_{\lambda} \rho(u_\lambda)\eta = \eta.$$

$$U(\pi(a)\pi(a')\xi) = U(\pi(aa')\xi) = \rho(aa')\eta$$

Continuación.

Las representaciones π y ρ son no degeneradas, ya que son cíclicas. Por lo tanto, si $(u_\lambda)_\lambda$ es una unidad aproximada de A y $a, a' \in A$, tendremos:

$$U\xi = U(\lim_{\lambda} \pi(u_\lambda)\xi) = \lim_{\lambda} U\pi(u_\lambda)\xi = \lim_{\lambda} \rho(u_\lambda)\eta = \eta.$$

$$U(\pi(a)\pi(a')\xi) = U(\pi(aa')\xi) = \rho(aa')\eta = \rho(a)\rho(a')\eta$$

Continuación.

Las representaciones π y ρ son no degeneradas, ya que son cíclicas. Por lo tanto, si $(u_\lambda)_\lambda$ es una unidad aproximada de A y $a, a' \in A$, tendremos:

$$U\xi = U(\lim_{\lambda} \pi(u_\lambda)\xi) = \lim_{\lambda} U\pi(u_\lambda)\xi = \lim_{\lambda} \rho(u_\lambda)\eta = \eta.$$

$$U(\pi(a)\pi(a')\xi) = U(\pi(aa')\xi) = \rho(aa')\eta = \rho(a)\rho(a')\eta = \rho(a)U(\pi(a')\xi).$$

Continuación.

Las representaciones π y ρ son no degeneradas, ya que son cíclicas. Por lo tanto, si $(u_\lambda)_\lambda$ es una unidad aproximada de A y $a, a' \in A$, tendremos:

$$U\xi = U(\lim_\lambda \pi(u_\lambda)\xi) = \lim_\lambda U\pi(u_\lambda)\xi = \lim_\lambda \rho(u_\lambda)\eta = \eta.$$

$$U(\pi(a)\pi(a')\xi) = U(\pi(aa')\xi) = \rho(aa')\eta = \rho(a)\rho(a')\eta = \rho(a)U(\pi(a')\xi).$$

Entonces $U\pi(a)\zeta = \rho(a)U\zeta$, para todo $a \in A$, $\zeta \in \pi(A)\mathcal{H}$.

Continuación.

Las representaciones π y ρ son no degeneradas, ya que son cíclicas. Por lo tanto, si $(u_\lambda)_\lambda$ es una unidad aproximada de A y $a, a' \in A$, tendremos:

$$U\xi = U(\lim_{\lambda} \pi(u_\lambda)\xi) = \lim_{\lambda} U\pi(u_\lambda)\xi = \lim_{\lambda} \rho(u_\lambda)\eta = \eta.$$

$$U(\pi(a)\pi(a')\xi) = U(\pi(aa')\xi) = \rho(aa')\eta = \rho(a)\rho(a')\eta = \rho(a)U(\pi(a')\xi).$$

Entonces $U\pi(a)\zeta = \rho(a)U\zeta$, para todo $a \in A$, $\zeta \in \pi(A)\mathcal{H}$. Luego $\rho(a) = U\pi(a)U^*$, para todo $a \in A$, ya que $\overline{\pi(A)\mathcal{H}} = \mathcal{H}$.

Continuación.

Las representaciones π y ρ son no degeneradas, ya que son cíclicas. Por lo tanto, si $(u_\lambda)_\lambda$ es una unidad aproximada de A y $a, a' \in A$, tendremos:

$$U\xi = U(\lim_\lambda \pi(u_\lambda)\xi) = \lim_\lambda U\pi(u_\lambda)\xi = \lim_\lambda \rho(u_\lambda)\eta = \eta.$$

$$U(\pi(a)\pi(a')\xi) = U(\pi(aa')\xi) = \rho(aa')\eta = \rho(a)\rho(a')\eta = \rho(a)U(\pi(a')\xi).$$

Entonces $U\pi(a)\zeta = \rho(a)U\zeta$, para todo $a \in A$, $\zeta \in \pi(A)\mathcal{H}$. Luego $\rho(a) = U\pi(a)U^*$, para todo $a \in A$, ya que $\overline{\pi(A)\mathcal{H}} = \mathcal{H}$.

En otras palabras:

Continuación.

Las representaciones π y ρ son no degeneradas, ya que son cíclicas. Por lo tanto, si $(u_\lambda)_\lambda$ es una unidad aproximada de A y $a, a' \in A$, tendremos:

$$U\xi = U(\lim_{\lambda} \pi(u_\lambda)\xi) = \lim_{\lambda} U\pi(u_\lambda)\xi = \lim_{\lambda} \rho(u_\lambda)\eta = \eta.$$

$$U(\pi(a)\pi(a')\xi) = U(\pi(aa')\xi) = \rho(aa')\eta = \rho(a)\rho(a')\eta = \rho(a)U(\pi(a')\xi).$$

Entonces $U\pi(a)\zeta = \rho(a)U\zeta$, para todo $a \in A$, $\zeta \in \pi(A)\mathcal{H}$. Luego $\rho(a) = U\pi(a)U^*$, para todo $a \in A$, ya que $\overline{\pi(A)\mathcal{H}} = \mathcal{H}$.

En otras palabras:

$$\rho(a) = U\pi(a)U^*, \quad \forall a \in A.$$

Existencia:

Continuación.

Las representaciones π y ρ son no degeneradas, ya que son cíclicas. Por lo tanto, si $(u_\lambda)_\lambda$ es una unidad aproximada de A y $a, a' \in A$, tendremos:

$$U\xi = U(\lim_\lambda \pi(u_\lambda)\xi) = \lim_\lambda U\pi(u_\lambda)\xi = \lim_\lambda \rho(u_\lambda)\eta = \eta.$$

$$U(\pi(a)\pi(a')\xi) = U(\pi(aa')\xi) = \rho(aa')\eta = \rho(a)\rho(a')\eta = \rho(a)U(\pi(a')\xi).$$

Entonces $U\pi(a)\zeta = \rho(a)U\zeta$, para todo $a \in A$, $\zeta \in \pi(A)\mathcal{H}$. Luego $\rho(a) = U\pi(a)U^*$, para todo $a \in A$, ya que $\overline{\pi(A)\mathcal{H}} = \mathcal{H}$.

En otras palabras:

$$\rho(a) = U\pi(a)U^*, \quad \forall a \in A.$$

Existencia:

Consideremos el semi-producto interno sobre A inducido por φ :

Continuación.

Las representaciones π y ρ son no degeneradas, ya que son cíclicas. Por lo tanto, si $(u_\lambda)_\lambda$ es una unidad aproximada de A y $a, a' \in A$, tendremos:

$$U\xi = U(\lim_\lambda \pi(u_\lambda)\xi) = \lim_\lambda U\pi(u_\lambda)\xi = \lim_\lambda \rho(u_\lambda)\eta = \eta.$$

$$U(\pi(a)\pi(a')\xi) = U(\pi(aa')\xi) = \rho(aa')\eta = \rho(a)\rho(a')\eta = \rho(a)U(\pi(a')\xi).$$

Entonces $U\pi(a)\zeta = \rho(a)U\zeta$, para todo $a \in A$, $\zeta \in \pi(A)\mathcal{H}$. Luego $\rho(a) = U\pi(a)U^*$, para todo $a \in A$, ya que $\overline{\pi(A)\mathcal{H}} = \mathcal{H}$.

En otras palabras:

$$\rho(a) = U\pi(a)U^*, \quad \forall a \in A.$$

Existencia:

Consideremos el semi-producto interno sobre A inducido por φ :

$[,]_\varphi : A \times A \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $[a, b]_\varphi = \varphi(b^*a)$, $\forall a, b \in A$.

Continuación.

Las representaciones π y ρ son no degeneradas, ya que son cíclicas. Por lo tanto, si $(u_\lambda)_\lambda$ es una unidad aproximada de A y $a, a' \in A$, tendremos:

$$U\xi = U(\lim_\lambda \pi(u_\lambda)\xi) = \lim_\lambda U\pi(u_\lambda)\xi = \lim_\lambda \rho(u_\lambda)\eta = \eta.$$

$$U(\pi(a)\pi(a')\xi) = U(\pi(aa')\xi) = \rho(aa')\eta = \rho(a)\rho(a')\eta = \rho(a)U(\pi(a')\xi).$$

Entonces $U\pi(a)\zeta = \rho(a)U\zeta$, para todo $a \in A$, $\zeta \in \pi(A)\mathcal{H}$. Luego $\rho(a) = U\pi(a)U^*$, para todo $a \in A$, ya que $\overline{\pi(A)\mathcal{H}} = \mathcal{H}$.

En otras palabras:

$$\rho(a) = U\pi(a)U^*, \quad \forall a \in A.$$

Existencia:

Consideremos el semi-producto interno sobre A inducido por φ :

$[\cdot, \cdot]_\varphi : A \times A \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $[a, b]_\varphi = \varphi(b^*a)$, $\forall a, b \in A$. Sea $\|\cdot\|_\varphi$ la seminorma inducida por $[\cdot, \cdot]_\varphi$, es decir:

Continuación.

Las representaciones π y ρ son no degeneradas, ya que son cíclicas. Por lo tanto, si $(u_\lambda)_\lambda$ es una unidad aproximada de A y $a, a' \in A$, tendremos:

$$U\xi = U(\lim_\lambda \pi(u_\lambda)\xi) = \lim_\lambda U\pi(u_\lambda)\xi = \lim_\lambda \rho(u_\lambda)\eta = \eta.$$

$$U(\pi(a)\pi(a')\xi) = U(\pi(aa')\xi) = \rho(aa')\eta = \rho(a)\rho(a')\eta = \rho(a)U(\pi(a')\xi).$$

Entonces $U\pi(a)\zeta = \rho(a)U\zeta$, para todo $a \in A$, $\zeta \in \pi(A)\mathcal{H}$. Luego $\rho(a) = U\pi(a)U^*$, para todo $a \in A$, ya que $\overline{\pi(A)\mathcal{H}} = \mathcal{H}$.

En otras palabras:

$$\rho(a) = U\pi(a)U^*, \quad \forall a \in A.$$

Existencia:

Consideremos el semi-producto interno sobre A inducido por φ :

$[,]_\varphi : A \times A \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $[a, b]_\varphi = \varphi(b^*a)$, $\forall a, b \in A$. Sea $\| \cdot \|_\varphi$ la seminorma inducida por $[,]_\varphi$, es decir: $\|a\|_\varphi = [a, a]_\varphi^{1/2} = \varphi(a^*a)^{1/2}$.

Continuación de la demostración.

Continuación de la demostración.

Continuación de la demostración.

Continuación de la demostración.

Para $a \in A$, consideremos el mapa lineal $L_a : A \rightarrow A$ dado por $L_a(x) = ax$.

Continuación de la demostración.

Para $a \in A$, consideremos el mapa lineal $L_a : A \rightarrow A$ dado por $L_a(x) = ax$. Si $x \in A$, entonces

Continuación de la demostración.

Para $a \in A$, consideremos el mapa lineal $L_a : A \rightarrow A$ dado por $L_a(x) = ax$. Si $x \in A$, entonces

$$x^* a^* a x \leq x^* \|a\|^2 x$$

Continuación de la demostración.

Para $a \in A$, consideremos el mapa lineal $L_a : A \rightarrow A$ dado por $L_a(x) = ax$. Si $x \in A$, entonces

$$x^* a^* a x \leq x^* \|a\|^2 x = \|a\|^2 x^* x,$$

Continuación de la demostración.

Para $a \in A$, consideremos el mapa lineal $L_a : A \rightarrow A$ dado por $L_a(x) = ax$. Si $x \in A$, entonces

$$x^* a^* a x \leq x^* \|a\|^2 x = \|a\|^2 x^* x,$$

y como φ es positiva:

Continuación de la demostración.

Para $a \in A$, consideremos el mapa lineal $L_a : A \rightarrow A$ dado por $L_a(x) = ax$. Si $x \in A$, entonces

$$x^* a^* a x \leq x^* \|a\|^2 x = \|a\|^2 x^* x,$$

y como φ es positiva:

$$\|L_a(x)\|_\varphi^2 = [ax, ax]_\varphi$$

Continuación de la demostración.

Para $a \in A$, consideremos el mapa lineal $L_a : A \rightarrow A$ dado por $L_a(x) = ax$. Si $x \in A$, entonces

$$x^* a^* a x \leq x^* \|a\|^2 x = \|a\|^2 x^* x,$$

y como φ es positiva:

$$\|L_a(x)\|_\varphi^2 = [ax, ax]_\varphi = \varphi(x^* a^* a x)$$

Continuación de la demostración.

Para $a \in A$, consideremos el mapa lineal $L_a : A \rightarrow A$ dado por $L_a(x) = ax$. Si $x \in A$, entonces

$$x^* a^* a x \leq x^* \|a\|^2 x = \|a\|^2 x^* x,$$

y como φ es positiva:

$$\|L_a(x)\|_\varphi^2 = [ax, ax]_\varphi = \varphi(x^* a^* a x) \leq \|a\|^2 \varphi(x^* x)$$

Continuación de la demostración.

Para $a \in A$, consideremos el mapa lineal $L_a : A \rightarrow A$ dado por $L_a(x) = ax$. Si $x \in A$, entonces

$$x^* a^* a x \leq x^* \|a\|^2 x = \|a\|^2 x^* x,$$

y como φ es positiva:

$$\|L_a(x)\|_\varphi^2 = [ax, ax]_\varphi = \varphi(x^* a^* a x) \leq \|a\|^2 \varphi(x^* x) = \|a\|^2 [x, x]_\varphi$$

Continuación de la demostración.

Para $a \in A$, consideremos el mapa lineal $L_a : A \rightarrow A$ dado por $L_a(x) = ax$. Si $x \in A$, entonces

$$x^* a^* a x \leq x^* \|a\|^2 x = \|a\|^2 x^* x,$$

y como φ es positiva:

$$\|L_a(x)\|_\varphi^2 = [ax, ax]_\varphi = \varphi(x^* a^* a x) \leq \|a\|^2 \varphi(x^* x) = \|a\|^2 [x, x]_\varphi = \|a\|^2 \|x\|_\varphi^2.$$

Continuación de la demostración.

Para $a \in A$, consideremos el mapa lineal $L_a : A \rightarrow A$ dado por $L_a(x) = ax$. Si $x \in A$, entonces

$$x^* a^* a x \leq x^* \|a\|^2 x = \|a\|^2 x^* x,$$

y como φ es positiva:

$$\|L_a(x)\|_\varphi^2 = [ax, ax]_\varphi = \varphi(x^* a^* a x) \leq \|a\|^2 \varphi(x^* x) = \|a\|^2 [x, x]_\varphi = \|a\|^2 \|x\|_\varphi^2.$$

Esto muestra que L_a es un operador acotado en $(A, \|\cdot\|_\varphi)$,

Continuación de la demostración.

Para $a \in A$, consideremos el mapa lineal $L_a : A \rightarrow A$ dado por $L_a(x) = ax$. Si $x \in A$, entonces

$$x^* a^* a x \leq x^* \|a\|^2 x = \|a\|^2 x^* x,$$

y como φ es positiva:

$$\|L_a(x)\|_\varphi^2 = [ax, ax]_\varphi = \varphi(x^* a^* a x) \leq \|a\|^2 \varphi(x^* x) = \|a\|^2 [x, x]_\varphi = \|a\|^2 \|x\|_\varphi^2.$$

Esto muestra que L_a es un operador acotado en $(A, \|\cdot\|_\varphi)$, con seminorma menor o igual a $\|a\|$. Por lo tanto, si $N_\varphi := \{x \in A : [x, x]_\varphi = 0\}$,

Continuación de la demostración.

Para $a \in A$, consideremos el mapa lineal $L_a : A \rightarrow A$ dado por $L_a(x) = ax$. Si $x \in A$, entonces

$$x^* a^* a x \leq x^* \|a\|^2 x = \|a\|^2 x^* x,$$

y como φ es positiva:

$$\|L_a(x)\|_\varphi^2 = [ax, ax]_\varphi = \varphi(x^* a^* a x) \leq \|a\|^2 \varphi(x^* x) = \|a\|^2 [x, x]_\varphi = \|a\|^2 \|x\|_\varphi^2.$$

Esto muestra que L_a es un operador acotado en $(A, \|\cdot\|_\varphi)$, con seminorma menor o igual a $\|a\|$. Por lo tanto, si $N_\varphi := \{x \in A : [x, x]_\varphi = 0\}$, entonces L_a induce un operador acotado $\pi'(a) : A/N_\varphi \rightarrow A/N_\varphi$,

Continuación de la demostración.

Para $a \in A$, consideremos el mapa lineal $L_a : A \rightarrow A$ dado por $L_a(x) = ax$. Si $x \in A$, entonces

$$x^* a^* a x \leq x^* \|a\|^2 x = \|a\|^2 x^* x,$$

y como φ es positiva:

$$\|L_a(x)\|_\varphi^2 = [ax, ax]_\varphi = \varphi(x^* a^* a x) \leq \|a\|^2 \varphi(x^* x) = \|a\|^2 [x, x]_\varphi = \|a\|^2 \|x\|_\varphi^2.$$

Esto muestra que L_a es un operador acotado en $(A, \|\cdot\|_\varphi)$, con seminorma menor o igual a $\|a\|$. Por lo tanto, si $N_\varphi := \{x \in A : [x, x]_\varphi = 0\}$, entonces L_a induce un operador acotado $\pi'(a) : A/N_\varphi \rightarrow A/N_\varphi$, tal que conmuta el diagrama

Continuación de la demostración.

Para $a \in A$, consideremos el mapa lineal $L_a : A \rightarrow A$ dado por $L_a(x) = ax$. Si $x \in A$, entonces

$$x^* a^* ax \leq x^* \|a\|^2 x = \|a\|^2 x^* x,$$

y como φ es positiva:

$$\|L_a(x)\|_\varphi^2 = [ax, ax]_\varphi = \varphi(x^* a^* ax) \leq \|a\|^2 \varphi(x^* x) = \|a\|^2 [x, x]_\varphi = \|a\|^2 \|x\|_\varphi^2.$$

Esto muestra que L_a es un operador acotado en $(A, \|\cdot\|_\varphi)$, con seminorma menor o igual a $\|a\|$. Por lo tanto, si $N_\varphi := \{x \in A : [x, x]_\varphi = 0\}$, entonces L_a induce un operador acotado $\pi'(a) : A/N_\varphi \rightarrow A/N_\varphi$, tal que conmuta el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{L_a} & A, \\ q \downarrow & & \downarrow q \\ A/N_\varphi & \xrightarrow{\pi'(a)} & A/N_\varphi \end{array}$$

donde $q : A \rightarrow A/N_\varphi$ es la proyección canónica.

Continuación de la demostración.

Continuación de la demostración.

Continuación de la demostración.

Continuación de la demostración.

Observar que el subespacio N_φ es también un ideal izquierdo en A .

Continuación de la demostración.

Observar que el subespacio N_φ es también un ideal izquierdo en A . Como $\|\pi'(a)\| \leq \|a\|$,

Continuación de la demostración.

Observar que el subespacio N_φ es también un ideal izquierdo en A . Como $\|\pi'(a)\| \leq \|a\|$, el operador $\pi'(a)$ se extiende por continuidad a la completación $(\mathcal{H}_\varphi, \langle \cdot, \cdot \rangle_\varphi)$ de $\frac{A}{N_\varphi}$ (recordar que es $\langle q(x), q(y) \rangle_\varphi = [x, y]_\varphi$).

Continuación de la demostración.

Observar que el subespacio N_φ es también un ideal izquierdo en A . Como $\|\pi'(a)\| \leq \|a\|$, el operador $\pi'(a)$ se extiende por continuidad a la completación $(\mathcal{H}_\varphi, \langle \cdot, \cdot \rangle_\varphi)$ de $\frac{A}{N_\varphi}$ (recordar que es $\langle q(x), q(y) \rangle_\varphi = [x, y]_\varphi$). Llamaremos $\pi(a)$ a esta extensión de $\pi'(a)$.

Continuación de la demostración.

Observar que el subespacio N_φ es también un ideal izquierdo en A . Como $\|\pi'(a)\| \leq \|a\|$, el operador $\pi'(a)$ se extiende por continuidad a la completación $(\mathcal{H}_\varphi, \langle \cdot, \cdot \rangle_\varphi)$ de $\frac{A}{N_\varphi}$ (recordar que es $\langle q(x), q(y) \rangle_\varphi = [x, y]_\varphi$). Llamaremos $\pi(a)$ a esta extensión de $\pi'(a)$.

Dada una unidad aproximada (u_λ) para A ,

Continuación de la demostración.

Observar que el subespacio N_φ es también un ideal izquierdo en A . Como $\|\pi'(a)\| \leq \|a\|$, el operador $\pi'(a)$ se extiende por continuidad a la completación $(\mathcal{H}_\varphi, \langle \cdot, \cdot \rangle_\varphi)$ de $\frac{A}{N_\varphi}$ (recordar que es $\langle q(x), q(y) \rangle_\varphi = [x, y]_\varphi$). Llamaremos $\pi(a)$ a esta extensión de $\pi'(a)$.

Dada una unidad aproximada (u_λ) para A , considérese $\xi_\lambda := q(u_\lambda) \in \mathcal{H}$.

Continuación de la demostración.

Observar que el subespacio N_φ es también un ideal izquierdo en A . Como $\|\pi'(a)\| \leq \|a\|$, el operador $\pi'(a)$ se extiende por continuidad a la completación $(\mathcal{H}_\varphi, \langle \cdot, \cdot \rangle_\varphi)$ de $\frac{A}{N_\varphi}$ (recordar que es $\langle q(x), q(y) \rangle_\varphi = [x, y]_\varphi$). Llamaremos $\pi(a)$ a esta extensión de $\pi'(a)$.

Dada una unidad aproximada (u_λ) para A , considérese $\xi_\lambda := q(u_\lambda) \in \mathcal{H}$. Veamos que existe $\xi \in \mathcal{H}$ tal que $\xi_\lambda \xrightarrow{\lambda} \xi$.

Continuación de la demostración.

Observar que el subespacio N_φ es también un ideal izquierdo en A . Como $\|\pi'(a)\| \leq \|a\|$, el operador $\pi'(a)$ se extiende por continuidad a la completación $(\mathcal{H}_\varphi, \langle \cdot, \cdot \rangle_\varphi)$ de $\frac{A}{N_\varphi}$ (recordar que es $\langle q(x), q(y) \rangle_\varphi = [x, y]_\varphi$). Llamaremos $\pi(a)$ a esta extensión de $\pi'(a)$.

Dada una unidad aproximada (u_λ) para A , considérese $\xi_\lambda := q(u_\lambda) \in \mathcal{H}$. Veamos que existe $\xi \in \mathcal{H}$ tal que $\xi_\lambda \xrightarrow{\lambda} \xi$. Como la red $(\varphi(u_\lambda))_\lambda$ es creciente y acotada, entonces converge,

Continuación de la demostración.

Observar que el subespacio N_φ es también un ideal izquierdo en A . Como $\|\pi'(a)\| \leq \|a\|$, el operador $\pi'(a)$ se extiende por continuidad a la completación $(\mathcal{H}_\varphi, \langle \cdot, \cdot \rangle_\varphi)$ de $\frac{A}{N_\varphi}$ (recordar que es $\langle q(x), q(y) \rangle_\varphi = [x, y]_\varphi$). Llamaremos $\pi(a)$ a esta extensión de $\pi'(a)$.

Dada una unidad aproximada (u_λ) para A , considérese $\xi_\lambda := q(u_\lambda) \in \mathcal{H}$. Veamos que existe $\xi \in \mathcal{H}$ tal que $\xi_\lambda \xrightarrow{\lambda} \xi$. Como la red $(\varphi(u_\lambda))_\lambda$ es creciente y acotada, entonces converge, y por lo tanto dado $\epsilon > 0$ existe λ_0 tal que $|\varphi(u_\lambda) - \varphi(u_{\lambda'})| < \epsilon^2/8$ si $\lambda, \lambda' \geq \lambda_0$.

Continuación de la demostración.

Observar que el subespacio N_φ es también un ideal izquierdo en A . Como $\|\pi'(a)\| \leq \|a\|$, el operador $\pi'(a)$ se extiende por continuidad a la completación $(\mathcal{H}_\varphi, \langle \cdot, \cdot \rangle_\varphi)$ de $\frac{A}{N_\varphi}$ (recordar que es $\langle q(x), q(y) \rangle_\varphi = [x, y]_\varphi$). Llamaremos $\pi(a)$ a esta extensión de $\pi'(a)$.

Dada una unidad aproximada (u_λ) para A , considérese $\xi_\lambda := q(u_\lambda) \in \mathcal{H}$. Veamos que existe $\xi \in \mathcal{H}$ tal que $\xi_\lambda \xrightarrow{\lambda} \xi$. Como la red $(\varphi(u_\lambda))_\lambda$ es creciente y acotada, entonces converge, y por lo tanto dado $\epsilon > 0$ existe λ_0 tal que $|\varphi(u_\lambda) - \varphi(u_{\lambda'})| < \epsilon^2/8$ si $\lambda, \lambda' \geq \lambda_0$. Por lo tanto, si $\lambda \geq \lambda_0$:

$$\|\xi_\lambda - \xi_{\lambda_0}\|^2 = [u_\lambda - u_{\lambda_0}, u_\lambda - u_{\lambda_0}]_\varphi$$

Continuación de la demostración.

Observar que el subespacio N_φ es también un ideal izquierdo en A . Como $\|\pi'(a)\| \leq \|a\|$, el operador $\pi'(a)$ se extiende por continuidad a la completación $(\mathcal{H}_\varphi, \langle \cdot, \cdot \rangle_\varphi)$ de $\frac{A}{N_\varphi}$ (recordar que es $\langle q(x), q(y) \rangle_\varphi = [x, y]_\varphi$). Llamaremos $\pi(a)$ a esta extensión de $\pi'(a)$.

Dada una unidad aproximada (u_λ) para A , considérese $\xi_\lambda := q(u_\lambda) \in \mathcal{H}$. Veamos que existe $\xi \in \mathcal{H}$ tal que $\xi_\lambda \xrightarrow{\lambda} \xi$. Como la red $(\varphi(u_\lambda))_\lambda$ es creciente y acotada, entonces converge, y por lo tanto dado $\epsilon > 0$ existe λ_0 tal que $|\varphi(u_\lambda) - \varphi(u_{\lambda'})| < \epsilon^2/8$ si $\lambda, \lambda' \geq \lambda_0$. Por lo tanto, si $\lambda \geq \lambda_0$:

$$\|\xi_\lambda - \xi_{\lambda_0}\|^2 = [u_\lambda - u_{\lambda_0}, u_\lambda - u_{\lambda_0}]_\varphi = \varphi((u_\lambda - u_{\lambda_0})^*(u_\lambda - u_{\lambda_0}))$$

Continuación de la demostración.

Observar que el subespacio N_φ es también un ideal izquierdo en A . Como $\|\pi'(a)\| \leq \|a\|$, el operador $\pi'(a)$ se extiende por continuidad a la completación $(\mathcal{H}_\varphi, \langle \cdot, \cdot \rangle_\varphi)$ de $\frac{A}{N_\varphi}$ (recordar que es $\langle q(x), q(y) \rangle_\varphi = [x, y]_\varphi$). Llamaremos $\pi(a)$ a esta extensión de $\pi'(a)$.

Dada una unidad aproximada (u_λ) para A , considérese $\xi_\lambda := q(u_\lambda) \in \mathcal{H}$. Veamos que existe $\xi \in \mathcal{H}$ tal que $\xi_\lambda \xrightarrow{\lambda} \xi$. Como la red $(\varphi(u_\lambda))_\lambda$ es creciente y acotada, entonces converge, y por lo tanto dado $\epsilon > 0$ existe λ_0 tal que $|\varphi(u_\lambda) - \varphi(u_{\lambda'})| < \epsilon^2/8$ si $\lambda, \lambda' \geq \lambda_0$. Por lo tanto, si $\lambda \geq \lambda_0$:

$$\begin{aligned}\|\xi_\lambda - \xi_{\lambda_0}\|^2 &= [u_\lambda - u_{\lambda_0}, u_\lambda - u_{\lambda_0}]_\varphi = \varphi((u_\lambda - u_{\lambda_0})^*(u_\lambda - u_{\lambda_0})) \\ &\leq \varphi(\|u_\lambda - u_{\lambda_0}\|(u_\lambda - u_{\lambda_0}))\end{aligned}$$

Continuación de la demostración.

Observar que el subespacio N_φ es también un ideal izquierdo en A . Como $\|\pi'(a)\| \leq \|a\|$, el operador $\pi'(a)$ se extiende por continuidad a la completación $(\mathcal{H}_\varphi, \langle \cdot, \cdot \rangle_\varphi)$ de $\frac{A}{N_\varphi}$ (recordar que es $\langle q(x), q(y) \rangle_\varphi = [x, y]_\varphi$). Llamaremos $\pi(a)$ a esta extensión de $\pi'(a)$.

Dada una unidad aproximada (u_λ) para A , considérese $\xi_\lambda := q(u_\lambda) \in \mathcal{H}$. Veamos que existe $\xi \in \mathcal{H}$ tal que $\xi_\lambda \xrightarrow{\lambda} \xi$. Como la red $(\varphi(u_\lambda))_\lambda$ es creciente y acotada, entonces converge, y por lo tanto dado $\epsilon > 0$ existe λ_0 tal que $|\varphi(u_\lambda) - \varphi(u_{\lambda'})| < \epsilon^2/8$ si $\lambda, \lambda' \geq \lambda_0$. Por lo tanto, si $\lambda \geq \lambda_0$:

$$\begin{aligned}\|\xi_\lambda - \xi_{\lambda_0}\|^2 &= [u_\lambda - u_{\lambda_0}, u_\lambda - u_{\lambda_0}]_\varphi = \varphi((u_\lambda - u_{\lambda_0})^*(u_\lambda - u_{\lambda_0})) \\ &\leq \varphi(\|u_\lambda - u_{\lambda_0}\|(u_\lambda - u_{\lambda_0})) = \|u_\lambda - u_{\lambda_0}\|(\varphi(u_\lambda) - \varphi(u_{\lambda_0}))\end{aligned}$$

Continuación de la demostración.

Observar que el subespacio N_φ es también un ideal izquierdo en A . Como $\|\pi'(a)\| \leq \|a\|$, el operador $\pi'(a)$ se extiende por continuidad a la completación $(\mathcal{H}_\varphi, \langle \cdot, \cdot \rangle_\varphi)$ de $\frac{A}{N_\varphi}$ (recordar que es $\langle q(x), q(y) \rangle_\varphi = [x, y]_\varphi$). Llamaremos $\pi(a)$ a esta extensión de $\pi'(a)$.

Dada una unidad aproximada (u_λ) para A , considérese $\xi_\lambda := q(u_\lambda) \in \mathcal{H}$. Veamos que existe $\xi \in \mathcal{H}$ tal que $\xi_\lambda \xrightarrow{\lambda} \xi$. Como la red $(\varphi(u_\lambda))_\lambda$ es creciente y acotada, entonces converge, y por lo tanto dado $\epsilon > 0$ existe λ_0 tal que $|\varphi(u_\lambda) - \varphi(u_{\lambda'})| < \epsilon^2/8$ si $\lambda, \lambda' \geq \lambda_0$. Por lo tanto, si $\lambda \geq \lambda_0$:

$$\begin{aligned}\|\xi_\lambda - \xi_{\lambda_0}\|^2 &= [u_\lambda - u_{\lambda_0}, u_\lambda - u_{\lambda_0}]_\varphi = \varphi((u_\lambda - u_{\lambda_0})^*(u_\lambda - u_{\lambda_0})) \\ &\leq \varphi(\|u_\lambda - u_{\lambda_0}\|(u_\lambda - u_{\lambda_0})) = \|u_\lambda - u_{\lambda_0}\|(\varphi(u_\lambda) - \varphi(u_{\lambda_0})) < 2\epsilon^2/8,\end{aligned}$$

Continuación de la demostración.

Observar que el subespacio N_φ es también un ideal izquierdo en A . Como $\|\pi'(a)\| \leq \|a\|$, el operador $\pi'(a)$ se extiende por continuidad a la completación $(\mathcal{H}_\varphi, \langle \cdot, \cdot \rangle_\varphi)$ de $\frac{A}{N_\varphi}$ (recordar que es $\langle q(x), q(y) \rangle_\varphi = [x, y]_\varphi$). Llamaremos $\pi(a)$ a esta extensión de $\pi'(a)$.

Dada una unidad aproximada (u_λ) para A , considérese $\xi_\lambda := q(u_\lambda) \in \mathcal{H}$. Veamos que existe $\xi \in \mathcal{H}$ tal que $\xi_\lambda \xrightarrow{\lambda} \xi$. Como la red $(\varphi(u_\lambda))_\lambda$ es creciente y acotada, entonces converge, y por lo tanto dado $\epsilon > 0$ existe λ_0 tal que $|\varphi(u_\lambda) - \varphi(u_{\lambda'})| < \epsilon^2/8$ si $\lambda, \lambda' \geq \lambda_0$. Por lo tanto, si $\lambda \geq \lambda_0$:

$$\begin{aligned}\|\xi_\lambda - \xi_{\lambda_0}\|^2 &= [u_\lambda - u_{\lambda_0}, u_\lambda - u_{\lambda_0}]_\varphi = \varphi((u_\lambda - u_{\lambda_0})^*(u_\lambda - u_{\lambda_0})) \\ &\leq \varphi(\|u_\lambda - u_{\lambda_0}\|(u_\lambda - u_{\lambda_0})) = \|u_\lambda - u_{\lambda_0}\|(\varphi(u_\lambda) - \varphi(u_{\lambda_0})) < 2\epsilon^2/8,\end{aligned}$$

de modo que $\|\xi_\lambda - \xi_{\lambda'}\| < \epsilon$ si $\lambda, \lambda' \geq \lambda_0$.

Continuación de la demostración.

Observar que el subespacio N_φ es también un ideal izquierdo en A . Como $\|\pi'(a)\| \leq \|a\|$, el operador $\pi'(a)$ se extiende por continuidad a la completación $(\mathcal{H}_\varphi, \langle \cdot, \cdot \rangle_\varphi)$ de $\frac{A}{N_\varphi}$ (recordar que es $\langle q(x), q(y) \rangle_\varphi = [x, y]_\varphi$). Llamaremos $\pi(a)$ a esta extensión de $\pi'(a)$.

Dada una unidad aproximada (u_λ) para A , considérese $\xi_\lambda := q(u_\lambda) \in \mathcal{H}$. Veamos que existe $\xi \in \mathcal{H}$ tal que $\xi_\lambda \xrightarrow{\lambda} \xi$. Como la red $(\varphi(u_\lambda))_\lambda$ es creciente y acotada, entonces converge, y por lo tanto dado $\epsilon > 0$ existe λ_0 tal que $|\varphi(u_\lambda) - \varphi(u_{\lambda'})| < \epsilon^2/8$ si $\lambda, \lambda' \geq \lambda_0$. Por lo tanto, si $\lambda \geq \lambda_0$:

$$\begin{aligned} \|\xi_\lambda - \xi_{\lambda_0}\|^2 &= [u_\lambda - u_{\lambda_0}, u_\lambda - u_{\lambda_0}]_\varphi = \varphi((u_\lambda - u_{\lambda_0})^*(u_\lambda - u_{\lambda_0})) \\ &\leq \varphi(\|u_\lambda - u_{\lambda_0}\|(u_\lambda - u_{\lambda_0})) = \|u_\lambda - u_{\lambda_0}\|(\varphi(u_\lambda) - \varphi(u_{\lambda_0})) < 2\epsilon^2/8, \end{aligned}$$

de modo que $\|\xi_\lambda - \xi_{\lambda'}\| < \epsilon$ si $\lambda, \lambda' \geq \lambda_0$. Luego la red (ξ_λ) es de Cauchy,

Continuación de la demostración.

Observar que el subespacio N_φ es también un ideal izquierdo en A . Como $\|\pi'(a)\| \leq \|a\|$, el operador $\pi'(a)$ se extiende por continuidad a la completación $(\mathcal{H}_\varphi, \langle \cdot, \cdot \rangle_\varphi)$ de $\frac{A}{N_\varphi}$ (recordar que es $\langle q(x), q(y) \rangle_\varphi = [x, y]_\varphi$). Llamaremos $\pi(a)$ a esta extensión de $\pi'(a)$.

Dada una unidad aproximada (u_λ) para A , considérese $\xi_\lambda := q(u_\lambda) \in \mathcal{H}$. Veamos que existe $\xi \in \mathcal{H}$ tal que $\xi_\lambda \xrightarrow{\lambda} \xi$. Como la red $(\varphi(u_\lambda))_\lambda$ es creciente y acotada, entonces converge, y por lo tanto dado $\epsilon > 0$ existe λ_0 tal que $|\varphi(u_\lambda) - \varphi(u_{\lambda'})| < \epsilon^2/8$ si $\lambda, \lambda' \geq \lambda_0$. Por lo tanto, si $\lambda \geq \lambda_0$:

$$\begin{aligned}\|\xi_\lambda - \xi_{\lambda_0}\|^2 &= [u_\lambda - u_{\lambda_0}, u_\lambda - u_{\lambda_0}]_\varphi = \varphi((u_\lambda - u_{\lambda_0})^*(u_\lambda - u_{\lambda_0})) \\ &\leq \varphi(\|u_\lambda - u_{\lambda_0}\|(u_\lambda - u_{\lambda_0})) = \|u_\lambda - u_{\lambda_0}\|(\varphi(u_\lambda) - \varphi(u_{\lambda_0})) < 2\epsilon^2/8,\end{aligned}$$

de modo que $\|\xi_\lambda - \xi_{\lambda'}\| < \epsilon$ si $\lambda, \lambda' \geq \lambda_0$. Luego la red (ξ_λ) es de Cauchy, y entonces converge a cierto $\xi \in \mathcal{H}$.

Continuación de la demostración.

AFIRMACIÓN: π es una representación cíclica de A , con vector cíclico ξ .

Continuación de la demostración.

AFIRMACIÓN: π es una representación cíclica de A , con vector cíclico ξ .

- π es lineal. Como $a \mapsto L_a$ es lineal,

Continuación de la demostración.

AFIRMACIÓN: π es una representación cíclica de A , con vector cíclico ξ .

- π es lineal. Como $a \mapsto L_a$ es lineal,

Continuación de la demostración.

AFIRMACIÓN: π es una representación cíclica de A , con vector cíclico ξ .

- π es lineal. Como $a \mapsto L_a$ es lineal, y el pasaje de operadores acotados en A a operadores acotados en el cociente A/N_φ también es lineal,

Continuación de la demostración.

AFIRMACIÓN: π es una representación cíclica de A , con vector cíclico ξ .

- π es lineal. Como $a \mapsto L_a$ es lineal, y el pasaje de operadores acotados en A a operadores acotados en el cociente A/N_φ también es lineal, se tiene que π' es lineal.

Continuación de la demostración.

AFIRMACIÓN: π es una representación cíclica de A , con vector cíclico ξ .

- π es lineal. Como $a \mapsto L_a$ es lineal, y el pasaje de operadores acotados en A a operadores acotados en el cociente A/N_φ también es lineal, se tiene que π' es lineal. Entonces π también lo es, pues la extensión de operadores acotados en A/N_φ a su completación $\mathcal{H}_\varphi$ también es lineal

Continuación de la demostración.

AFIRMACIÓN: π es una representación cíclica de A , con vector cíclico ξ .

- π es lineal. Como $a \mapsto L_a$ es lineal, y el pasaje de operadores acotados en A a operadores acotados en el cociente A/N_φ también es lineal, se tiene que π' es lineal. Entonces π también lo es, pues la extensión de operadores acotados en A/N_φ a su completación $\mathcal{H}_\varphi$ también es lineal (tomar límite es una operación lineal).

Continuación de la demostración.

AFIRMACIÓN: π es una representación cíclica de A , con vector cíclico ξ .

- π es lineal. Como $a \mapsto L_a$ es lineal, y el pasaje de operadores acotados en A a operadores acotados en el cociente A/N_φ también es lineal, se tiene que π' es lineal. Entonces π también lo es, pues la extensión de operadores acotados en A/N_φ a su completación $\mathcal{H}_\varphi$ también es lineal (tomar límite es una operación lineal).
- π es multiplicativa:

Continuación de la demostración.

AFIRMACIÓN: π es una representación cíclica de A , con vector cíclico ξ .

- π es lineal. Como $a \mapsto L_a$ es lineal, y el pasaje de operadores acotados en A a operadores acotados en el cociente A/N_φ también es lineal, se tiene que π' es lineal. Entonces π también lo es, pues la extensión de operadores acotados en A/N_φ a su completación $\mathcal{H}_\varphi$ también es lineal (tomar límite es una operación lineal).
- π es multiplicativa:

Continuación de la demostración.

AFIRMACIÓN: π es una representación cíclica de A , con vector cíclico ξ .

- π es lineal. Como $a \mapsto L_a$ es lineal, y el pasaje de operadores acotados en A a operadores acotados en el cociente A/N_φ también es lineal, se tiene que π' es lineal. Entonces π también lo es, pues la extensión de operadores acotados en A/N_φ a su completación $\mathcal{H}_\varphi$ también es lineal (tomar límite es una operación lineal).
- π es multiplicativa:

$$\pi(ab)q = qL(ab)$$

Continuación de la demostración.

AFIRMACIÓN: π es una representación cíclica de A , con vector cíclico ξ .

- π es lineal. Como $a \mapsto L_a$ es lineal, y el pasaje de operadores acotados en A a operadores acotados en el cociente A/N_φ también es lineal, se tiene que π' es lineal. Entonces π también lo es, pues la extensión de operadores acotados en A/N_φ a su completación $\mathcal{H}_\varphi$ también es lineal (tomar límite es una operación lineal).
- π es multiplicativa:

$$\pi(ab)q = qL(ab) = q(L(a)L(b))$$

Continuación de la demostración.

AFIRMACIÓN: π es una representación cíclica de A , con vector cíclico ξ .

- π es lineal. Como $a \mapsto L_a$ es lineal, y el pasaje de operadores acotados en A a operadores acotados en el cociente A/N_φ también es lineal, se tiene que π' es lineal. Entonces π también lo es, pues la extensión de operadores acotados en A/N_φ a su completación $\mathcal{H}_\varphi$ también es lineal (tomar límite es una operación lineal).
- π es multiplicativa:

$$\pi(ab)q = qL(ab) = q(L(a)L(b)) = (qL(a))L(b)$$

Continuación de la demostración.

AFIRMACIÓN: π es una representación cíclica de A , con vector cíclico ξ .

- π es lineal. Como $a \mapsto L_a$ es lineal, y el pasaje de operadores acotados en A a operadores acotados en el cociente A/N_φ también es lineal, se tiene que π' es lineal. Entonces π también lo es, pues la extensión de operadores acotados en A/N_φ a su completación $\mathcal{H}_\varphi$ también es lineal (tomar límite es una operación lineal).
- π es multiplicativa:

$$\begin{aligned}\pi(ab)q &= qL(ab) = q(L(a)L(b)) = (qL(a))L(b) \\ &= (\pi(a)q)L(b)\end{aligned}$$

Continuación de la demostración.

AFIRMACIÓN: π es una representación cíclica de A , con vector cíclico ξ .

- π es lineal. Como $a \mapsto L_a$ es lineal, y el pasaje de operadores acotados en A a operadores acotados en el cociente A/N_φ también es lineal, se tiene que π' es lineal. Entonces π también lo es, pues la extensión de operadores acotados en A/N_φ a su completación $\mathcal{H}_\varphi$ también es lineal (tomar límite es una operación lineal).
- π es multiplicativa:

$$\begin{aligned}\pi(ab)q &= qL(ab) = q(L(a)L(b)) = (qL(a))L(b) \\ &= (\pi(a)q)L(b) = \pi(a)(qL(b))\end{aligned}$$

Continuación de la demostración.

AFIRMACIÓN: π es una representación cíclica de A , con vector cíclico ξ .

- π es lineal. Como $a \mapsto L_a$ es lineal, y el pasaje de operadores acotados en A a operadores acotados en el cociente A/N_φ también es lineal, se tiene que π' es lineal. Entonces π también lo es, pues la extensión de operadores acotados en A/N_φ a su completación $\mathcal{H}_\varphi$ también es lineal (tomar límite es una operación lineal).
- π es multiplicativa:

$$\begin{aligned}\pi(ab)q &= qL(ab) = q(L(a)L(b)) = (qL(a))L(b) \\ &= (\pi(a)q)L(b) = \pi(a)(qL(b)) = \pi(a)\pi(b)q.\end{aligned}$$

Continuación de la demostración.

AFIRMACIÓN: π es una representación cíclica de A , con vector cíclico ξ .

- π es lineal. Como $a \mapsto L_a$ es lineal, y el pasaje de operadores acotados en A a operadores acotados en el cociente A/N_φ también es lineal, se tiene que π' es lineal. Entonces π también lo es, pues la extensión de operadores acotados en A/N_φ a su completación $\mathcal{H}_\varphi$ también es lineal (tomar límite es una operación lineal).
- π es multiplicativa:

$$\begin{aligned}\pi(ab)q &= qL(ab) = q(L(a)L(b)) = (qL(a))L(b) \\ &= (\pi(a)q)L(b) = \pi(a)(qL(b)) = \pi(a)\pi(b)q.\end{aligned}$$

Entonces $\pi(ab) = \pi(a)\pi(b)$ en $q(A)$, y por lo tanto en $\mathcal{H}_\varphi$.

Continuación de la demostración.

AFIRMACIÓN: π es una representación cíclica de A , con vector cíclico ξ .

- π es lineal. Como $a \mapsto L_a$ es lineal, y el pasaje de operadores acotados en A a operadores acotados en el cociente A/N_φ también es lineal, se tiene que π' es lineal. Entonces π también lo es, pues la extensión de operadores acotados en A/N_φ a su completación $\mathcal{H}_\varphi$ también es lineal (tomar límite es una operación lineal).
- π es multiplicativa:

$$\begin{aligned}\pi(ab)q &= qL(ab) = q(L(a)L(b)) = (qL(a))L(b) \\ &= (\pi(a)q)L(b) = \pi(a)(qL(b)) = \pi(a)\pi(b)q.\end{aligned}$$

Entonces $\pi(ab) = \pi(a)\pi(b)$ en $q(A)$, y por lo tanto en $\mathcal{H}_\varphi$.

- π preserva la involución:

Continuación de la demostración.

AFIRMACIÓN: π es una representación cíclica de A , con vector cíclico ξ .

- π es lineal. Como $a \mapsto L_a$ es lineal, y el pasaje de operadores acotados en A a operadores acotados en el cociente A/N_φ también es lineal, se tiene que π' es lineal. Entonces π también lo es, pues la extensión de operadores acotados en A/N_φ a su completación $\mathcal{H}_\varphi$ también es lineal (tomar límite es una operación lineal).
- π es multiplicativa:

$$\begin{aligned}\pi(ab)q &= qL(ab) = q(L(a)L(b)) = (qL(a))L(b) \\ &= (\pi(a)q)L(b) = \pi(a)(qL(b)) = \pi(a)\pi(b)q.\end{aligned}$$

Entonces $\pi(ab) = \pi(a)\pi(b)$ en $q(A)$, y por lo tanto en $\mathcal{H}_\varphi$.

- π preserva la involución:

Continuación de la demostración.

AFIRMACIÓN: π es una representación cíclica de A , con vector cíclico ξ .

- π es lineal. Como $a \mapsto L_a$ es lineal, y el pasaje de operadores acotados en A a operadores acotados en el cociente A/N_φ también es lineal, se tiene que π' es lineal. Entonces π también lo es, pues la extensión de operadores acotados en A/N_φ a su completación $\mathcal{H}_\varphi$ también es lineal (tomar límite es una operación lineal).
- π es multiplicativa:

$$\begin{aligned}\pi(ab)q &= qL(ab) = q(L(a)L(b)) = (qL(a))L(b) \\ &= (\pi(a)q)L(b) = \pi(a)(qL(b)) = \pi(a)\pi(b)q.\end{aligned}$$

Entonces $\pi(ab) = \pi(a)\pi(b)$ en $q(A)$, y por lo tanto en $\mathcal{H}_\varphi$.

- π preserva la involución:

$$\langle \pi(a^*)q(x), q(y) \rangle_\varphi = \langle q(a^*x), q(y) \rangle_\varphi$$

Continuación de la demostración.

AFIRMACIÓN: π es una representación cíclica de A , con vector cíclico ξ .

- π es lineal. Como $a \mapsto L_a$ es lineal, y el pasaje de operadores acotados en A a operadores acotados en el cociente A/N_φ también es lineal, se tiene que π' es lineal. Entonces π también lo es, pues la extensión de operadores acotados en A/N_φ a su completación $\mathcal{H}_\varphi$ también es lineal (tomar límite es una operación lineal).
- π es multiplicativa:

$$\begin{aligned}\pi(ab)q &= qL(ab) = q(L(a)L(b)) = (qL(a))L(b) \\ &= (\pi(a)q)L(b) = \pi(a)(qL(b)) = \pi(a)\pi(b)q.\end{aligned}$$

Entonces $\pi(ab) = \pi(a)\pi(b)$ en $q(A)$, y por lo tanto en $\mathcal{H}_\varphi$.

- π preserva la involución:

$$\langle \pi(a^*)q(x), q(y) \rangle_\varphi = \langle q(a^*x), q(y) \rangle_\varphi = [a^*x, y]_\varphi$$

Continuación de la demostración.

AFIRMACIÓN: π es una representación cíclica de A , con vector cíclico ξ .

- π es lineal. Como $a \mapsto L_a$ es lineal, y el pasaje de operadores acotados en A a operadores acotados en el cociente A/N_φ también es lineal, se tiene que π' es lineal. Entonces π también lo es, pues la extensión de operadores acotados en A/N_φ a su completación $\mathcal{H}_\varphi$ también es lineal (tomar límite es una operación lineal).
- π es multiplicativa:

$$\begin{aligned}\pi(ab)q &= qL(ab) = q(L(a)L(b)) = (qL(a))L(b) \\ &= (\pi(a)q)L(b) = \pi(a)(qL(b)) = \pi(a)\pi(b)q.\end{aligned}$$

Entonces $\pi(ab) = \pi(a)\pi(b)$ en $q(A)$, y por lo tanto en $\mathcal{H}_\varphi$.

- π preserva la involución:

$$\langle \pi(a^*)q(x), q(y) \rangle_\varphi = \langle q(a^*x), q(y) \rangle_\varphi = [a^*x, y]_\varphi = \varphi(y^*(a^*x))$$

Continuación de la demostración.

AFIRMACIÓN: π es una representación cíclica de A , con vector cíclico ξ .

- π es lineal. Como $a \mapsto L_a$ es lineal, y el pasaje de operadores acotados en A a operadores acotados en el cociente A/N_φ también es lineal, se tiene que π' es lineal. Entonces π también lo es, pues la extensión de operadores acotados en A/N_φ a su completación $\mathcal{H}_\varphi$ también es lineal (tomar límite es una operación lineal).
- π es multiplicativa:

$$\begin{aligned}\pi(ab)q &= qL(ab) = q(L(a)L(b)) = (qL(a))L(b) \\ &= (\pi(a)q)L(b) = \pi(a)(qL(b)) = \pi(a)\pi(b)q.\end{aligned}$$

Entonces $\pi(ab) = \pi(a)\pi(b)$ en $q(A)$, y por lo tanto en $\mathcal{H}_\varphi$.

- π preserva la involución:

$$\begin{aligned}\langle \pi(a^*)q(x), q(y) \rangle_\varphi &= \langle q(a^*x), q(y) \rangle_\varphi = [a^*x, y]_\varphi = \varphi(y^*(a^*x)) \\ &= \varphi((ay)^*x)\end{aligned}$$

Continuación de la demostración.

AFIRMACIÓN: π es una representación cíclica de A , con vector cíclico ξ .

- π es lineal. Como $a \mapsto L_a$ es lineal, y el pasaje de operadores acotados en A a operadores acotados en el cociente A/N_φ también es lineal, se tiene que π' es lineal. Entonces π también lo es, pues la extensión de operadores acotados en A/N_φ a su completación $\mathcal{H}_\varphi$ también es lineal (tomar límite es una operación lineal).
- π es multiplicativa:

$$\begin{aligned}\pi(ab)q &= qL(ab) = q(L(a)L(b)) = (qL(a))L(b) \\ &= (\pi(a)q)L(b) = \pi(a)(qL(b)) = \pi(a)\pi(b)q.\end{aligned}$$

Entonces $\pi(ab) = \pi(a)\pi(b)$ en $q(A)$, y por lo tanto en $\mathcal{H}_\varphi$.

- π preserva la involución:

$$\begin{aligned}\langle \pi(a^*)q(x), q(y) \rangle_\varphi &= \langle q(a^*x), q(y) \rangle_\varphi = [a^*x, y]_\varphi = \varphi(y^*(a^*x)) \\ &= \varphi((ay)^*x) = [x, ay]_\varphi\end{aligned}$$

Continuación de la demostración.

AFIRMACIÓN: π es una representación cíclica de A , con vector cíclico ξ .

- π es lineal. Como $a \mapsto L_a$ es lineal, y el pasaje de operadores acotados en A a operadores acotados en el cociente A/N_φ también es lineal, se tiene que π' es lineal. Entonces π también lo es, pues la extensión de operadores acotados en A/N_φ a su completación $\mathcal{H}_\varphi$ también es lineal (tomar límite es una operación lineal).
- π es multiplicativa:

$$\begin{aligned}\pi(ab)q &= qL(ab) = q(L(a)L(b)) = (qL(a))L(b) \\ &= (\pi(a)q)L(b) = \pi(a)(qL(b)) = \pi(a)\pi(b)q.\end{aligned}$$

Entonces $\pi(ab) = \pi(a)\pi(b)$ en $q(A)$, y por lo tanto en $\mathcal{H}_\varphi$.

- π preserva la involución:

$$\begin{aligned}\langle \pi(a^*)q(x), q(y) \rangle_\varphi &= \langle q(a^*x), q(y) \rangle_\varphi = [a^*x, y]_\varphi = \varphi(y^*(a^*x)) \\ &= \varphi((ay)^*x) = [x, ay]_\varphi = \langle q(x), q(ay) \rangle_\varphi\end{aligned}$$

Continuación de la demostración.

AFIRMACIÓN: π es una representación cíclica de A , con vector cíclico ξ .

- π es lineal. Como $a \mapsto L_a$ es lineal, y el pasaje de operadores acotados en A a operadores acotados en el cociente A/N_φ también es lineal, se tiene que π' es lineal. Entonces π también lo es, pues la extensión de operadores acotados en A/N_φ a su completación $\mathcal{H}_\varphi$ también es lineal (tomar límite es una operación lineal).
- π es multiplicativa:

$$\begin{aligned}\pi(ab)q &= qL(ab) = q(L(a)L(b)) = (qL(a))L(b) \\ &= (\pi(a)q)L(b) = \pi(a)(qL(b)) = \pi(a)\pi(b)q.\end{aligned}$$

Entonces $\pi(ab) = \pi(a)\pi(b)$ en $q(A)$, y por lo tanto en $\mathcal{H}_\varphi$.

- π preserva la involución:

$$\begin{aligned}\langle \pi(a^*)q(x), q(y) \rangle_\varphi &= \langle q(a^*x), q(y) \rangle_\varphi = [a^*x, y]_\varphi = \varphi(y^*(a^*x)) \\ &= \varphi((ay)^*x) = [x, ay]_\varphi = \langle q(x), q(ay) \rangle_\varphi \\ &= \langle q(x), \pi(a)q(y) \rangle_\varphi\end{aligned}$$

Continuación de la demostración.

AFIRMACIÓN: π es una representación cíclica de A , con vector cíclico ξ .

- π es lineal. Como $a \mapsto L_a$ es lineal, y el pasaje de operadores acotados en A a operadores acotados en el cociente A/N_φ también es lineal, se tiene que π' es lineal. Entonces π también lo es, pues la extensión de operadores acotados en A/N_φ a su completación $\mathcal{H}_\varphi$ también es lineal (tomar límite es una operación lineal).
- π es multiplicativa:

$$\begin{aligned}\pi(ab)q &= qL(ab) = q(L(a)L(b)) = (qL(a))L(b) \\ &= (\pi(a)q)L(b) = \pi(a)(qL(b)) = \pi(a)\pi(b)q.\end{aligned}$$

Entonces $\pi(ab) = \pi(a)\pi(b)$ en $q(A)$, y por lo tanto en $\mathcal{H}_\varphi$.

- π preserva la involución:

$$\begin{aligned}\langle \pi(a^*)q(x), q(y) \rangle_\varphi &= \langle q(a^*x), q(y) \rangle_\varphi = [a^*x, y]_\varphi = \varphi(y^*(a^*x)) \\ &= \varphi((ay)^*x) = [x, ay]_\varphi = \langle q(x), q(ay) \rangle_\varphi \\ &= \langle q(x), \pi(a)q(y) \rangle_\varphi = \langle \pi(a)^*q(x), q(y) \rangle_\varphi.\end{aligned}$$

Continuación de la demostración.

AFIRMACIÓN: π es una representación cíclica de A , con vector cíclico ξ .

- π es lineal. Como $a \mapsto L_a$ es lineal, y el pasaje de operadores acotados en A a operadores acotados en el cociente A/N_φ también es lineal, se tiene que π' es lineal. Entonces π también lo es, pues la extensión de operadores acotados en A/N_φ a su completación $\mathcal{H}_\varphi$ también es lineal (tomar límite es una operación lineal).
- π es multiplicativa:

$$\begin{aligned}\pi(ab)q &= qL(ab) = q(L(a)L(b)) = (qL(a))L(b) \\ &= (\pi(a)q)L(b) = \pi(a)(qL(b)) = \pi(a)\pi(b)q.\end{aligned}$$

Entonces $\pi(ab) = \pi(a)\pi(b)$ en $q(A)$, y por lo tanto en $\mathcal{H}_\varphi$.

- π preserva la involución:

$$\begin{aligned}\langle \pi(a^*)q(x), q(y) \rangle_\varphi &= \langle q(a^*x), q(y) \rangle_\varphi = [a^*x, y]_\varphi = \varphi(y^*(a^*x)) \\ &= \varphi((ay)^*x) = [x, ay]_\varphi = \langle q(x), q(ay) \rangle_\varphi \\ &= \langle q(x), \pi(a)q(y) \rangle_\varphi = \langle \pi(a)^*q(x), q(y) \rangle_\varphi.\end{aligned}$$

Continuación de la demostración.

Continuación de la demostración.

- ξ es cíclico para π :

Continuación de la demostración.

- ξ es cíclico para π :

Continuación de la demostración.

- ξ es cíclico para π : como $\forall a \in A$ se tiene

$$\pi(a)\xi = \lim_{\lambda} \pi(a)(\xi_{\lambda})$$

Continuación de la demostración.

- ξ es cíclico para π : como $\forall a \in A$ se tiene

$$\pi(a)\xi = \lim_{\lambda} \pi(a)(\xi_{\lambda}) = \lim_{\lambda} \pi(a)q(u_{\lambda})$$

Continuación de la demostración.

- ξ es cíclico para π : como $\forall a \in A$ se tiene

$$\pi(a)\xi = \lim_{\lambda} \pi(a)(\xi_{\lambda}) = \lim_{\lambda} \pi(a)q(u_{\lambda}) = \lim_{\lambda} q(au_{\lambda})$$

Continuación de la demostración.

- ξ es cíclico para π : como $\forall a \in A$ se tiene

$$\pi(a)\xi = \lim_{\lambda} \pi(a)(\xi_{\lambda}) = \lim_{\lambda} \pi(a)q(u_{\lambda}) = \lim_{\lambda} q(au_{\lambda}) = q(a),$$

Continuación de la demostración.

- ξ es cíclico para π : como $\forall a \in A$ se tiene

$$\pi(a)\xi = \lim_{\lambda} \pi(a)(\xi_{\lambda}) = \lim_{\lambda} \pi(a)q(u_{\lambda}) = \lim_{\lambda} q(au_{\lambda}) = q(a),$$

entonces

Continuación de la demostración.

- ξ es cíclico para π : como $\forall a \in A$ se tiene

$$\pi(a)\xi = \lim_{\lambda} \pi(a)(\xi_{\lambda}) = \lim_{\lambda} \pi(a)q(u_{\lambda}) = \lim_{\lambda} q(au_{\lambda}) = q(a),$$

entonces

$$\overline{\{\pi(a)\xi, a \in A\}} = \overline{q(A)}$$

Continuación de la demostración.

- ξ es cíclico para π : como $\forall a \in A$ se tiene

$$\pi(a)\xi = \lim_{\lambda} \pi(a)(\xi_{\lambda}) = \lim_{\lambda} \pi(a)q(u_{\lambda}) = \lim_{\lambda} q(au_{\lambda}) = q(a),$$

entonces

$$\overline{\{\pi(a)\xi, a \in A\}} = \overline{q(A)} = \mathcal{H}_{\varphi}.$$

Continuación de la demostración.

- ξ es cíclico para π : como $\forall a \in A$ se tiene

$$\pi(a)\xi = \lim_{\lambda} \pi(a)(\xi_{\lambda}) = \lim_{\lambda} \pi(a)q(u_{\lambda}) = \lim_{\lambda} q(au_{\lambda}) = q(a),$$

entonces

$$\overline{\{\pi(a)\xi, a \in A\}} = \overline{q(A)} = \mathcal{H}_{\varphi}.$$

- $\varphi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle_{\varphi}$:

Continuación de la demostración.

- ξ es cíclico para π : como $\forall a \in A$ se tiene

$$\pi(a)\xi = \lim_{\lambda} \pi(a)(\xi_{\lambda}) = \lim_{\lambda} \pi(a)q(u_{\lambda}) = \lim_{\lambda} q(au_{\lambda}) = q(a),$$

entonces

$$\overline{\{\pi(a)\xi, a \in A\}} = \overline{q(A)} = \mathcal{H}_{\varphi}.$$

- $\varphi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle_{\varphi}$:

Continuación de la demostración.

- ξ es cíclico para π : como $\forall a \in A$ se tiene

$$\pi(a)\xi = \lim_{\lambda} \pi(a)(\xi_{\lambda}) = \lim_{\lambda} \pi(a)q(u_{\lambda}) = \lim_{\lambda} q(au_{\lambda}) = q(a),$$

entonces

$$\overline{\{\pi(a)\xi, a \in A\}} = \overline{q(A)} = \mathcal{H}_{\varphi}.$$

- $\varphi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle_{\varphi}$:

$$\varphi(a) = \lim_{\lambda} \varphi(u_{\lambda} a u_{\lambda})$$

Continuación de la demostración.

- ξ es cíclico para π : como $\forall a \in A$ se tiene

$$\pi(a)\xi = \lim_{\lambda} \pi(a)(\xi_{\lambda}) = \lim_{\lambda} \pi(a)q(u_{\lambda}) = \lim_{\lambda} q(au_{\lambda}) = q(a),$$

entonces

$$\overline{\{\pi(a)\xi, a \in A\}} = \overline{q(A)} = \mathcal{H}_{\varphi}.$$

- $\varphi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle_{\varphi}$:

$$\begin{aligned}\varphi(a) &= \lim_{\lambda} \varphi(u_{\lambda} a u_{\lambda}) \\ &= \lim_{\lambda} \langle q(au_{\lambda}), q(u_{\lambda}) \rangle_{\varphi}\end{aligned}$$

Continuación de la demostración.

- ξ es cíclico para π : como $\forall a \in A$ se tiene

$$\pi(a)\xi = \lim_{\lambda} \pi(a)(\xi_{\lambda}) = \lim_{\lambda} \pi(a)q(u_{\lambda}) = \lim_{\lambda} q(au_{\lambda}) = q(a),$$

entonces

$$\overline{\{\pi(a)\xi, a \in A\}} = \overline{q(A)} = \mathcal{H}_{\varphi}.$$

- $\varphi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle_{\varphi}$:

$$\begin{aligned}\varphi(a) &= \lim_{\lambda} \varphi(u_{\lambda} a u_{\lambda}) \\ &= \lim_{\lambda} \langle q(au_{\lambda}), q(u_{\lambda}) \rangle_{\varphi} \\ &= \lim_{\lambda} \langle \pi(a)q(u_{\lambda}), q(u_{\lambda}) \rangle_{\varphi}\end{aligned}$$

Continuación de la demostración.

- ξ es cíclico para π : como $\forall a \in A$ se tiene

$$\pi(a)\xi = \lim_{\lambda} \pi(a)(\xi_{\lambda}) = \lim_{\lambda} \pi(a)q(u_{\lambda}) = \lim_{\lambda} q(au_{\lambda}) = q(a),$$

entonces

$$\overline{\{\pi(a)\xi, a \in A\}} = \overline{q(A)} = \mathcal{H}_{\varphi}.$$

- $\varphi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle_{\varphi}$:

$$\begin{aligned}\varphi(a) &= \lim_{\lambda} \varphi(u_{\lambda} a u_{\lambda}) \\ &= \lim_{\lambda} \langle q(au_{\lambda}), q(u_{\lambda}) \rangle_{\varphi} \\ &= \lim_{\lambda} \langle \pi(a)q(u_{\lambda}), q(u_{\lambda}) \rangle_{\varphi} \\ &= \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle_{\varphi}\end{aligned}$$

Continuación de la demostración.

- ξ es cíclico para π : como $\forall a \in A$ se tiene

$$\pi(a)\xi = \lim_{\lambda} \pi(a)(\xi_{\lambda}) = \lim_{\lambda} \pi(a)q(u_{\lambda}) = \lim_{\lambda} q(au_{\lambda}) = q(a),$$

entonces

$$\overline{\{\pi(a)\xi, a \in A\}} = \overline{q(A)} = \mathcal{H}_{\varphi}.$$

- $\varphi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle_{\varphi}$:

$$\begin{aligned}\varphi(a) &= \lim_{\lambda} \varphi(u_{\lambda} a u_{\lambda}) \\ &= \lim_{\lambda} \langle q(au_{\lambda}), q(u_{\lambda}) \rangle_{\varphi} \\ &= \lim_{\lambda} \langle \pi(a)q(u_{\lambda}), q(u_{\lambda}) \rangle_{\varphi} \\ &= \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle_{\varphi}\end{aligned}$$

En resumen la construcción GNS establece una biyección entre el conjunto de clases de equivalencia unitaria de representaciones cíclicas de A y el conjunto de funcionales lineales positivas de A .

$$\{(\pi, \mathcal{H}, \xi) \text{ rep. cíclica de } A\} / \sim_u \xrightarrow{\text{GNS}} \{\varphi \text{ funcional positiva en } A\}$$

Funcionales positivas II

Proposición

Sean A una C^ -álgebra, y $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funcional lineal continua. Entonces son equivalentes:*

Funcionales positivas II

Proposición

Sean A una C^ -álgebra, y $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funcional lineal continua. Entonces son equivalentes:*

(i) $\varphi \geq 0$.

Funcionales positivas II

Proposición

Sean A una C^* -álgebra, y $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funcional lineal continua. Entonces son equivalentes:

- (i) $\varphi \geq 0$.
- (ii) $\lim_{\lambda} \varphi(u_{\lambda}) = \|\varphi\|$, para toda unidad aproximada (u_{λ}) de A .

Funcionales positivas II

Proposición

Sean A una C^* -álgebra, y $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funcional lineal continua. Entonces son equivalentes:

- (i) $\varphi \geq 0$.
- (ii) $\lim_{\lambda} \varphi(u_{\lambda}) = \|\varphi\|$, para toda unidad aproximada (u_{λ}) de A .
- (iii) $\lim_{\lambda} \varphi(u_{\lambda}) = \|\varphi\|$, para alguna unidad aproximada (u_{λ}) de A .

Funcionales positivas II

Proposición

Sean A una C^* -álgebra, y $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funcional lineal continua. Entonces son equivalentes:

- (i) $\varphi \geq 0$.
- (ii) $\lim_{\lambda} \varphi(u_{\lambda}) = \|\varphi\|$, para toda unidad aproximada (u_{λ}) de A .
- (iii) $\lim_{\lambda} \varphi(u_{\lambda}) = \|\varphi\|$, para alguna unidad aproximada (u_{λ}) de A .

Demostración.

Funcionales positivas II

Proposición

Sean A una C^* -álgebra, y $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funcional lineal continua. Entonces son equivalentes:

- (i) $\varphi \geq 0$.
- (ii) $\lim_{\lambda} \varphi(u_{\lambda}) = \|\varphi\|$, para toda unidad aproximada (u_{λ}) de A .
- (iii) $\lim_{\lambda} \varphi(u_{\lambda}) = \|\varphi\|$, para alguna unidad aproximada (u_{λ}) de A .

Demostración.

Funcionales positivas II

Proposición

Sean A una C^* -álgebra, y $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funcional lineal continua. Entonces son equivalentes:

- (i) $\varphi \geq 0$.
- (ii) $\lim_{\lambda} \varphi(u_{\lambda}) = \|\varphi\|$, para toda unidad aproximada (u_{λ}) de A .
- (iii) $\lim_{\lambda} \varphi(u_{\lambda}) = \|\varphi\|$, para alguna unidad aproximada (u_{λ}) de A .

Demostración.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Es inmediato.

Funcionales positivas II

Proposición

Sean A una C^* -álgebra, y $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funcional lineal continua. Entonces son equivalentes:

- (i) $\varphi \geq 0$.
- (ii) $\lim_{\lambda} \varphi(u_{\lambda}) = \|\varphi\|$, para toda unidad aproximada (u_{λ}) de A .
- (iii) $\lim_{\lambda} \varphi(u_{\lambda}) = \|\varphi\|$, para alguna unidad aproximada (u_{λ}) de A .

Demostración.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Es inmediato.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Sea $(\mathcal{H}, \pi, \xi) = \text{GNS}(\varphi)$.

Funcionales positivas II

Proposición

Sean A una C^* -álgebra, y $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funcional lineal continua. Entonces son equivalentes:

- (i) $\varphi \geq 0$.
- (ii) $\lim_{\lambda} \varphi(u_{\lambda}) = \|\varphi\|$, para toda unidad aproximada (u_{λ}) de A .
- (iii) $\lim_{\lambda} \varphi(u_{\lambda}) = \|\varphi\|$, para alguna unidad aproximada (u_{λ}) de A .

Demostración.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Es inmediato.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Sea $(\mathcal{H}, \pi, \xi) = \text{GNS}(\varphi)$. Por lo tanto $\varphi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle \ \forall a \in A$.

Funcionales positivas II

Proposición

Sean A una C^* -álgebra, y $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funcional lineal continua. Entonces son equivalentes:

- (i) $\varphi \geq 0$.
- (ii) $\lim_{\lambda} \varphi(u_{\lambda}) = \|\varphi\|$, para toda unidad aproximada (u_{λ}) de A .
- (iii) $\lim_{\lambda} \varphi(u_{\lambda}) = \|\varphi\|$, para alguna unidad aproximada (u_{λ}) de A .

Demostración.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Es inmediato.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Sea $(\mathcal{H}, \pi, \xi) = \text{GNS}(\varphi)$. Por lo tanto $\varphi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle \ \forall a \in A$. Sea (u_{λ}) una unidad aproximada de A .

Funcionales positivas II

Proposición

Sean A una C^* -álgebra, y $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funcional lineal continua. Entonces son equivalentes:

- (i) $\varphi \geq 0$.
- (ii) $\lim_{\lambda} \varphi(u_{\lambda}) = \|\varphi\|$, para toda unidad aproximada (u_{λ}) de A .
- (iii) $\lim_{\lambda} \varphi(u_{\lambda}) = \|\varphi\|$, para alguna unidad aproximada (u_{λ}) de A .

Demostración.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Es inmediato.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Sea $(\mathcal{H}, \pi, \xi) = \text{GNS}(\varphi)$. Por lo tanto $\varphi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle \ \forall a \in A$. Sea (u_{λ}) una unidad aproximada de A . Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene

Funcionales positivas II

Proposición

Sean A una C^* -álgebra, y $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funcional lineal continua. Entonces son equivalentes:

- (i) $\varphi \geq 0$.
- (ii) $\lim_{\lambda} \varphi(u_{\lambda}) = \|\varphi\|$, para toda unidad aproximada (u_{λ}) de A .
- (iii) $\lim_{\lambda} \varphi(u_{\lambda}) = \|\varphi\|$, para alguna unidad aproximada (u_{λ}) de A .

Demostración.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Es inmediato.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Sea $(\mathcal{H}, \pi, \xi) = \text{GNS}(\varphi)$. Por lo tanto $\varphi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle \ \forall a \in A$. Sea (u_{λ}) una unidad aproximada de A . Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene

$$\|\xi\|^2 \geq \sup_{\|a\| \leq 1} |\langle \pi(a)\xi, \xi \rangle|$$

Funcionales positivas II

Proposición

Sean A una C^* -álgebra, y $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funcional lineal continua. Entonces son equivalentes:

- (i) $\varphi \geq 0$.
- (ii) $\lim_{\lambda} \varphi(u_{\lambda}) = \|\varphi\|$, para toda unidad aproximada (u_{λ}) de A .
- (iii) $\lim_{\lambda} \varphi(u_{\lambda}) = \|\varphi\|$, para alguna unidad aproximada (u_{λ}) de A .

Demostración.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Es inmediato.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Sea $(\mathcal{H}, \pi, \xi) = \text{GNS}(\varphi)$. Por lo tanto $\varphi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle \ \forall a \in A$. Sea (u_{λ}) una unidad aproximada de A . Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene

$$\|\xi\|^2 \geq \sup_{\|a\| \geq 1} |\langle \pi(a)\xi, \xi \rangle| = \sup_{\|a\| \geq 1} |\varphi(a)|$$

Funcionales positivas II

Proposición

Sean A una C^* -álgebra, y $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funcional lineal continua. Entonces son equivalentes:

- (i) $\varphi \geq 0$.
- (ii) $\lim_{\lambda} \varphi(u_{\lambda}) = \|\varphi\|$, para toda unidad aproximada (u_{λ}) de A .
- (iii) $\lim_{\lambda} \varphi(u_{\lambda}) = \|\varphi\|$, para alguna unidad aproximada (u_{λ}) de A .

Demostración.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Es inmediato.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Sea $(\mathcal{H}, \pi, \xi) = \text{GNS}(\varphi)$. Por lo tanto $\varphi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle \ \forall a \in A$. Sea (u_{λ}) una unidad aproximada de A . Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene

$$\|\xi\|^2 \geq \sup_{\|a\| \geq 1} |\langle \pi(a)\xi, \xi \rangle| = \sup_{\|a\| \geq 1} |\varphi(a)| = \|\varphi\|$$

Funcionales positivas II

Proposición

Sean A una C^* -álgebra, y $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funcional lineal continua. Entonces son equivalentes:

- (i) $\varphi \geq 0$.
- (ii) $\lim_{\lambda} \varphi(u_{\lambda}) = \|\varphi\|$, para toda unidad aproximada (u_{λ}) de A .
- (iii) $\lim_{\lambda} \varphi(u_{\lambda}) = \|\varphi\|$, para alguna unidad aproximada (u_{λ}) de A .

Demostración.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Es inmediato.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Sea $(\mathcal{H}, \pi, \xi) = \text{GNS}(\varphi)$. Por lo tanto $\varphi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle \ \forall a \in A$. Sea (u_{λ}) una unidad aproximada de A . Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene

$$\begin{aligned} \|\xi\|^2 &\geq \sup_{\|a\| \geq 1} |\langle \pi(a)\xi, \xi \rangle| = \sup_{\|a\| \geq 1} |\varphi(a)| = \|\varphi\| \\ &\geq \lim_{\lambda} \varphi(u_{\lambda}) \end{aligned}$$

Funcionales positivas II

Proposición

Sean A una C^* -álgebra, y $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funcional lineal continua. Entonces son equivalentes:

- (i) $\varphi \geq 0$.
- (ii) $\lim_{\lambda} \varphi(u_{\lambda}) = \|\varphi\|$, para toda unidad aproximada (u_{λ}) de A .
- (iii) $\lim_{\lambda} \varphi(u_{\lambda}) = \|\varphi\|$, para alguna unidad aproximada (u_{λ}) de A .

Demostración.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Es inmediato.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Sea $(\mathcal{H}, \pi, \xi) = \text{GNS}(\varphi)$. Por lo tanto $\varphi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle \ \forall a \in A$. Sea (u_{λ}) una unidad aproximada de A . Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene

$$\begin{aligned} \|\xi\|^2 &\geq \sup_{\|a\| \geq 1} |\langle \pi(a)\xi, \xi \rangle| = \sup_{\|a\| \geq 1} |\varphi(a)| = \|\varphi\| \\ &\geq \lim_{\lambda} \varphi(u_{\lambda}) = \lim_{\lambda} \langle \pi(u_{\lambda})\xi, \xi \rangle \end{aligned}$$

Funcionales positivas II

Proposición

Sean A una C^* -álgebra, y $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funcional lineal continua. Entonces son equivalentes:

- (i) $\varphi \geq 0$.
- (ii) $\lim_{\lambda} \varphi(u_{\lambda}) = \|\varphi\|$, para toda unidad aproximada (u_{λ}) de A .
- (iii) $\lim_{\lambda} \varphi(u_{\lambda}) = \|\varphi\|$, para alguna unidad aproximada (u_{λ}) de A .

Demostración.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Es inmediato.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Sea $(\mathcal{H}, \pi, \xi) = \text{GNS}(\varphi)$. Por lo tanto $\varphi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle \ \forall a \in A$. Sea (u_{λ}) una unidad aproximada de A . Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene

$$\begin{aligned} \|\xi\|^2 &\geq \sup_{\|a\| \geq 1} |\langle \pi(a)\xi, \xi \rangle| = \sup_{\|a\| \geq 1} |\varphi(a)| = \|\varphi\| \\ &\geq \lim_{\lambda} \varphi(u_{\lambda}) = \lim_{\lambda} \langle \pi(u_{\lambda})\xi, \xi \rangle = \|\xi\|^2. \end{aligned}$$

Funcionales positivas II

Proposición

Sean A una C^* -álgebra, y $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funcional lineal continua. Entonces son equivalentes:

- (i) $\varphi \geq 0$.
- (ii) $\lim_{\lambda} \varphi(u_{\lambda}) = \|\varphi\|$, para toda unidad aproximada (u_{λ}) de A .
- (iii) $\lim_{\lambda} \varphi(u_{\lambda}) = \|\varphi\|$, para alguna unidad aproximada (u_{λ}) de A .

Demostración.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Es inmediato.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Sea $(\mathcal{H}, \pi, \xi) = \text{GNS}(\varphi)$. Por lo tanto $\varphi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle \forall a \in A$. Sea (u_{λ}) una unidad aproximada de A . Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene

$$\begin{aligned} \|\xi\|^2 &\geq \sup_{\|a\| \geq 1} |\langle \pi(a)\xi, \xi \rangle| = \sup_{\|a\| \geq 1} |\varphi(a)| = \|\varphi\| \\ &\geq \lim_{\lambda} \varphi(u_{\lambda}) = \lim_{\lambda} \langle \pi(u_{\lambda})\xi, \xi \rangle = \|\xi\|^2. \end{aligned}$$

Luego es $\lim_{\lambda} \varphi(u_{\lambda}) = \|\varphi\| = \|\xi\|^2$.

Continuación de la prueba.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Podemos suponer que $\|\varphi\| = 1$.

Continuación de la prueba.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Podemos suponer que $\|\varphi\| = 1$.

Continuación de la prueba.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Podemos suponer que $\|\varphi\| = 1$. Veamos primero que si $a = a^*$ entonces $\varphi(a) \in \mathbb{R}$.

Continuación de la prueba.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Podemos suponer que $\|\varphi\| = 1$. Veamos primero que si $a = a^*$ entonces $\varphi(a) \in \mathbb{R}$. Sea $\varphi(a) = \alpha + i\beta$;

Continuación de la prueba.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Podemos suponer que $\|\varphi\| = 1$. Veamos primero que si $a = a^*$ entonces $\varphi(a) \in \mathbb{R}$. Sea $\varphi(a) = \alpha + i\beta$; podemos suponer que $\beta < 0$ (en caso contrario cambiamos a por $-a$).

Continuación de la prueba.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Podemos suponer que $\|\varphi\| = 1$. Veamos primero que si $a = a^*$ entonces $\varphi(a) \in \mathbb{R}$. Sea $\varphi(a) = \alpha + i\beta$; podemos suponer que $\beta < 0$ (en caso contrario cambiamos a por $-a$). Se tiene, $\forall \lambda$:

Continuación de la prueba.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Podemos suponer que $\|\varphi\| = 1$. Veamos primero que si $a = a^*$ entonces $\varphi(a) \in \mathbb{R}$. Sea $\varphi(a) = \alpha + i\beta$; podemos suponer que $\beta < 0$ (en caso contrario cambiamos a por $-a$). Se tiene, $\forall \lambda$:

$$\|a - i\lambda u\|^2 = \|(a + i\lambda u)(a - i\lambda u)\|$$

Continuación de la prueba.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Podemos suponer que $\|\varphi\| = 1$. Veamos primero que si $a = a^*$ entonces $\varphi(a) \in \mathbb{R}$. Sea $\varphi(a) = \alpha + i\beta$; podemos suponer que $\beta < 0$ (en caso contrario cambiamos a por $-a$). Se tiene, $\forall \lambda$:

$$\|a - inu_\lambda\|^2 = \|(a + inu_\lambda)(a - inu_\lambda)\| = \|a^2 + n^2 u_\lambda^2 + in(u_\lambda a - au_\lambda)\|$$

Continuación de la prueba.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Podemos suponer que $\|\varphi\| = 1$. Veamos primero que si $a = a^*$ entonces $\varphi(a) \in \mathbb{R}$. Sea $\varphi(a) = \alpha + i\beta$; podemos suponer que $\beta < 0$ (en caso contrario cambiamos a por $-a$). Se tiene, $\forall \lambda$:

$$\begin{aligned}\|a - inu_\lambda\|^2 &= \|(a + inu_\lambda)(a - inu_\lambda)\| = \|a^2 + n^2 u_\lambda^2 + in(u_\lambda a - au_\lambda)\| \\ &\leq \|a\|^2 + n^2 + n\|u_\lambda a - au_\lambda\|.\end{aligned}$$

Continuación de la prueba.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Podemos suponer que $\|\varphi\| = 1$. Veamos primero que si $a = a^*$ entonces $\varphi(a) \in \mathbb{R}$. Sea $\varphi(a) = \alpha + i\beta$; podemos suponer que $\beta < 0$ (en caso contrario cambiamos a por $-a$). Se tiene, $\forall \lambda$:

$$\begin{aligned}\|a - inu_\lambda\|^2 &= \|(a + inu_\lambda)(a - inu_\lambda)\| = \|a^2 + n^2 u_\lambda^2 + in(u_\lambda a - au_\lambda)\| \\ &\leq \|a\|^2 + n^2 + n\|u_\lambda a - au_\lambda\|.\end{aligned}$$

Entonces

Continuación de la prueba.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Podemos suponer que $\|\varphi\| = 1$. Veamos primero que si $a = a^*$ entonces $\varphi(a) \in \mathbb{R}$. Sea $\varphi(a) = \alpha + i\beta$; podemos suponer que $\beta < 0$ (en caso contrario cambiamos a por $-a$). Se tiene, $\forall \lambda$:

$$\begin{aligned}\|a - inu_\lambda\|^2 &= \|(a + inu_\lambda)(a - inu_\lambda)\| = \|a^2 + n^2 u_\lambda^2 + in(u_\lambda a - au_\lambda)\| \\ &\leq \|a\|^2 + n^2 + n\|u_\lambda a - au_\lambda\|.\end{aligned}$$

Entonces

$$|\alpha + i\beta - in\varphi(u_\lambda)|^2 = |\varphi(a - inu_\lambda)|^2$$

Continuación de la prueba.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Podemos suponer que $\|\varphi\| = 1$. Veamos primero que si $a = a^*$ entonces $\varphi(a) \in \mathbb{R}$. Sea $\varphi(a) = \alpha + i\beta$; podemos suponer que $\beta < 0$ (en caso contrario cambiamos a por $-a$). Se tiene, $\forall \lambda$:

$$\begin{aligned}\|a - inu_\lambda\|^2 &= \|(a + inu_\lambda)(a - inu_\lambda)\| = \|a^2 + n^2 u_\lambda^2 + in(u_\lambda a - au_\lambda)\| \\ &\leq \|a\|^2 + n^2 + n\|u_\lambda a - au_\lambda\|.\end{aligned}$$

Entonces

$$|\alpha + i\beta - in\varphi(u_\lambda)|^2 = |\varphi(a - inu_\lambda)|^2 \leq \|a - inu_\lambda\|^2$$

Continuación de la prueba.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Podemos suponer que $\|\varphi\| = 1$. Veamos primero que si $a = a^*$ entonces $\varphi(a) \in \mathbb{R}$. Sea $\varphi(a) = \alpha + i\beta$; podemos suponer que $\beta < 0$ (en caso contrario cambiamos a por $-a$). Se tiene, $\forall \lambda$:

$$\begin{aligned}\|a - inu_\lambda\|^2 &= \|(a + inu_\lambda)(a - inu_\lambda)\| = \|a^2 + n^2 u_\lambda^2 + in(u_\lambda a - au_\lambda)\| \\ &\leq \|a\|^2 + n^2 + n\|u_\lambda a - au_\lambda\|.\end{aligned}$$

Entonces

$$|\alpha + i\beta - in\varphi(u_\lambda)|^2 = |\varphi(a - inu_\lambda)|^2 \leq \|a - inu_\lambda\|^2 \leq \|a\|^2 + n^2 + n\|u_\lambda a - au_\lambda\|$$

Continuación de la prueba.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Podemos suponer que $\|\varphi\| = 1$. Veamos primero que si $a = a^*$ entonces $\varphi(a) \in \mathbb{R}$. Sea $\varphi(a) = \alpha + i\beta$; podemos suponer que $\beta < 0$ (en caso contrario cambiamos a por $-a$). Se tiene, $\forall \lambda$:

$$\begin{aligned}\|a - inu_\lambda\|^2 &= \|(a + inu_\lambda)(a - inu_\lambda)\| = \|a^2 + n^2 u_\lambda^2 + in(u_\lambda a - au_\lambda)\| \\ &\leq \|a\|^2 + n^2 + n\|u_\lambda a - au_\lambda\|.\end{aligned}$$

Entonces

$$|\alpha + i\beta - in\varphi(u_\lambda)|^2 = |\varphi(a - inu_\lambda)|^2 \leq \|a - inu_\lambda\|^2 \leq \|a\|^2 + n^2 + n\|u_\lambda a - au_\lambda\|$$

Tomando límite en λ resulta: $|\alpha + i\beta - in|^2 \leq \|a\|^2 + n^2$. Por otro lado

Continuación de la prueba.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Podemos suponer que $\|\varphi\| = 1$. Veamos primero que si $a = a^*$ entonces $\varphi(a) \in \mathbb{R}$. Sea $\varphi(a) = \alpha + i\beta$; podemos suponer que $\beta < 0$ (en caso contrario cambiamos a por $-a$). Se tiene, $\forall \lambda$:

$$\begin{aligned}\|a - inu_\lambda\|^2 &= \|(a + inu_\lambda)(a - inu_\lambda)\| = \|a^2 + n^2 u_\lambda^2 + in(u_\lambda a - au_\lambda)\| \\ &\leq \|a\|^2 + n^2 + n\|u_\lambda a - au_\lambda\|.\end{aligned}$$

Entonces

$$|\alpha + i\beta - in\varphi(u_\lambda)|^2 = |\varphi(a - inu_\lambda)|^2 \leq \|a - inu_\lambda\|^2 \leq \|a\|^2 + n^2 + n\|u_\lambda a - au_\lambda\|$$

Tomando límite en λ resulta: $|\alpha + i\beta - in|^2 \leq \|a\|^2 + n^2$. Por otro lado

$$|\alpha + i\beta - in|^2 = |\alpha + i(\beta - n)|^2$$

Continuación de la prueba.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Podemos suponer que $\|\varphi\| = 1$. Veamos primero que si $a = a^*$ entonces $\varphi(a) \in \mathbb{R}$. Sea $\varphi(a) = \alpha + i\beta$; podemos suponer que $\beta < 0$ (en caso contrario cambiamos a por $-a$). Se tiene, $\forall \lambda$:

$$\begin{aligned}\|a - inu_\lambda\|^2 &= \|(a + inu_\lambda)(a - inu_\lambda)\| = \|a^2 + n^2 u_\lambda^2 + in(u_\lambda a - au_\lambda)\| \\ &\leq \|a\|^2 + n^2 + n\|u_\lambda a - au_\lambda\|.\end{aligned}$$

Entonces

$$|\alpha + i\beta - in\varphi(u_\lambda)|^2 = |\varphi(a - inu_\lambda)|^2 \leq \|a - inu_\lambda\|^2 \leq \|a\|^2 + n^2 + n\|u_\lambda a - au_\lambda\|$$

Tomando límite en λ resulta: $|\alpha + i\beta - in|^2 \leq \|a\|^2 + n^2$. Por otro lado

$$|\alpha + i\beta - in|^2 = |\alpha + i(\beta - n)|^2 = \alpha^2 + (\beta - n)^2$$

Continuación de la prueba.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Podemos suponer que $\|\varphi\| = 1$. Veamos primero que si $a = a^*$ entonces $\varphi(a) \in \mathbb{R}$. Sea $\varphi(a) = \alpha + i\beta$; podemos suponer que $\beta < 0$ (en caso contrario cambiamos a por $-a$). Se tiene, $\forall \lambda$:

$$\begin{aligned}\|a - inu_\lambda\|^2 &= \|(a + inu_\lambda)(a - inu_\lambda)\| = \|a^2 + n^2 u_\lambda^2 + in(u_\lambda a - au_\lambda)\| \\ &\leq \|a\|^2 + n^2 + n\|u_\lambda a - au_\lambda\|.\end{aligned}$$

Entonces

$$|\alpha + i\beta - in\varphi(u_\lambda)|^2 = |\varphi(a - inu_\lambda)|^2 \leq \|a - inu_\lambda\|^2 \leq \|a\|^2 + n^2 + n\|u_\lambda a - au_\lambda\|$$

Tomando límite en λ resulta: $|\alpha + i\beta - in|^2 \leq \|a\|^2 + n^2$. Por otro lado

$$|\alpha + i\beta - in|^2 = |\alpha + i(\beta - n)|^2 = \alpha^2 + (\beta - n)^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2n\beta + n^2.$$

Continuación de la prueba.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Podemos suponer que $\|\varphi\| = 1$. Veamos primero que si $a = a^*$ entonces $\varphi(a) \in \mathbb{R}$. Sea $\varphi(a) = \alpha + i\beta$; podemos suponer que $\beta < 0$ (en caso contrario cambiamos a por $-a$). Se tiene, $\forall \lambda$:

$$\begin{aligned}\|a - inu_\lambda\|^2 &= \|(a + inu_\lambda)(a - inu_\lambda)\| = \|a^2 + n^2 u_\lambda^2 + in(u_\lambda a - au_\lambda)\| \\ &\leq \|a\|^2 + n^2 + n\|u_\lambda a - au_\lambda\|.\end{aligned}$$

Entonces

$$|\alpha + i\beta - in\varphi(u_\lambda)|^2 = |\varphi(a - inu_\lambda)|^2 \leq \|a - inu_\lambda\|^2 \leq \|a\|^2 + n^2 + n\|u_\lambda a - au_\lambda\|$$

Tomando límite en λ resulta: $|\alpha + i\beta - in|^2 \leq \|a\|^2 + n^2$. Por otro lado

$$|\alpha + i\beta - in|^2 = |\alpha + i(\beta - n)|^2 = \alpha^2 + (\beta - n)^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2n\beta + n^2.$$

Entonces $\alpha^2 + \beta^2 + n^2 - 2n\beta \leq \|a\|^2 + n^2$,

Continuación de la prueba.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Podemos suponer que $\|\varphi\| = 1$. Veamos primero que si $a = a^*$ entonces $\varphi(a) \in \mathbb{R}$. Sea $\varphi(a) = \alpha + i\beta$; podemos suponer que $\beta < 0$ (en caso contrario cambiamos a por $-a$). Se tiene, $\forall \lambda$:

$$\begin{aligned}\|a - inu_\lambda\|^2 &= \|(a + inu_\lambda)(a - inu_\lambda)\| = \|a^2 + n^2 u_\lambda^2 + in(u_\lambda a - au_\lambda)\| \\ &\leq \|a\|^2 + n^2 + n\|u_\lambda a - au_\lambda\|.\end{aligned}$$

Entonces

$$|\alpha + i\beta - in\varphi(u_\lambda)|^2 = |\varphi(a - inu_\lambda)|^2 \leq \|a - inu_\lambda\|^2 \leq \|a\|^2 + n^2 + n\|u_\lambda a - au_\lambda\|$$

Tomando límite en λ resulta: $|\alpha + i\beta - in|^2 \leq \|a\|^2 + n^2$. Por otro lado

$$|\alpha + i\beta - in|^2 = |\alpha + i(\beta - n)|^2 = \alpha^2 + (\beta - n)^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2n\beta + n^2.$$

Entonces $\alpha^2 + \beta^2 + n^2 - 2n\beta \leq \|a\|^2 + n^2$, así que $-2n\beta \leq \|a\|^2 - \alpha^2 - \beta^2$ para todo n , lo cual es absurdo.

Continuación de la prueba.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Podemos suponer que $\|\varphi\| = 1$. Veamos primero que si $a = a^*$ entonces $\varphi(a) \in \mathbb{R}$. Sea $\varphi(a) = \alpha + i\beta$; podemos suponer que $\beta < 0$ (en caso contrario cambiamos a por $-a$). Se tiene, $\forall \lambda$:

$$\begin{aligned}\|a - inu_\lambda\|^2 &= \|(a + inu_\lambda)(a - inu_\lambda)\| = \|a^2 + n^2 u_\lambda^2 + in(u_\lambda a - au_\lambda)\| \\ &\leq \|a\|^2 + n^2 + n\|u_\lambda a - au_\lambda\|.\end{aligned}$$

Entonces

$$|\alpha + i\beta - in\varphi(u_\lambda)|^2 = |\varphi(a - inu_\lambda)|^2 \leq \|a - inu_\lambda\|^2 \leq \|a\|^2 + n^2 + n\|u_\lambda a - au_\lambda\|$$

Tomando límite en λ resulta: $|\alpha + i\beta - in|^2 \leq \|a\|^2 + n^2$. Por otro lado

$$|\alpha + i\beta - in|^2 = |\alpha + i(\beta - n)|^2 = \alpha^2 + (\beta - n)^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2n\beta + n^2.$$

Entonces $\alpha^2 + \beta^2 + n^2 - 2n\beta \leq \|a\|^2 + n^2$, así que $-2n\beta \leq \|a\|^2 - \alpha^2 - \beta^2$ para todo n , lo cual es absurdo. Entonces $\beta = 0$, y por lo tanto $\varphi(a) \in \mathbb{R}$.

Continuación de la prueba.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Podemos suponer que $\|\varphi\| = 1$. Veamos primero que si $a = a^*$ entonces $\varphi(a) \in \mathbb{R}$. Sea $\varphi(a) = \alpha + i\beta$; podemos suponer que $\beta < 0$ (en caso contrario cambiamos a por $-a$). Se tiene, $\forall \lambda$:

$$\begin{aligned}\|a - inu_\lambda\|^2 &= \|(a + inu_\lambda)(a - inu_\lambda)\| = \|a^2 + n^2 u_\lambda^2 + in(u_\lambda a - au_\lambda)\| \\ &\leq \|a\|^2 + n^2 + n\|u_\lambda a - au_\lambda\|.\end{aligned}$$

Entonces

$$|\alpha + i\beta - in\varphi(u_\lambda)|^2 = |\varphi(a - inu_\lambda)|^2 \leq \|a - inu_\lambda\|^2 \leq \|a\|^2 + n^2 + n\|u_\lambda a - au_\lambda\|$$

Tomando límite en λ resulta: $|\alpha + i\beta - in|^2 \leq \|a\|^2 + n^2$. Por otro lado

$$|\alpha + i\beta - in|^2 = |\alpha + i(\beta - n)|^2 = \alpha^2 + (\beta - n)^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2n\beta + n^2.$$

Entonces $\alpha^2 + \beta^2 + n^2 - 2n\beta \leq \|a\|^2 + n^2$, así que $-2n\beta \leq \|a\|^2 - \alpha^2 - \beta^2$ para todo n , lo cual es absurdo. Entonces $\beta = 0$, y por lo tanto $\varphi(a) \in \mathbb{R}$.

Continuación de la demostración.

Ahora supongamos que $a \in A_+$, con $\|a\| < 1$.

Continuación de la demostración.

Ahora supongamos que $a \in A_+$, con $\|a\| < 1$.

Continuación de la demostración.

Ahora supongamos que $a \in A_+$, con $\|a\| < 1$. Entonces $0 \leq a \leq 1$, donde $1 \in \tilde{A}$,

Continuación de la demostración.

Ahora supongamos que $a \in A_+$, con $\|a\| < 1$. Entonces $0 \leq a \leq 1$, donde $1 \in \tilde{A}$, y por lo tanto

Continuación de la demostración.

Ahora supongamos que $a \in A_+$, con $\|a\| < 1$. Entonces $0 \leq a \leq 1$, donde $1 \in \tilde{A}$, y por lo tanto

$$-1 \leq -a$$

Continuación de la demostración.

Ahora supongamos que $a \in A_+$, con $\|a\| < 1$. Entonces $0 \leq a \leq 1$, donde $1 \in \tilde{A}$, y por lo tanto

$$-1 \leq -a \leq u_\lambda - a$$

Continuación de la demostración.

Ahora supongamos que $a \in A_+$, con $\|a\| < 1$. Entonces $0 \leq a \leq 1$, donde $1 \in \tilde{A}$, y por lo tanto

$$-1 \leq -a \leq u_\lambda - a \leq u_\lambda$$

Continuación de la demostración.

Ahora supongamos que $a \in A_+$, con $\|a\| < 1$. Entonces $0 \leq a \leq 1$, donde $1 \in \tilde{A}$, y por lo tanto

$$-1 \leq -a \leq u_\lambda - a \leq u_\lambda \leq 1.$$

Continuación de la demostración.

Ahora supongamos que $a \in A_+$, con $\|a\| < 1$. Entonces $0 \leq a \leq 1$, donde $1 \in \tilde{A}$, y por lo tanto

$$-1 \leq -a \leq u_\lambda - a \leq u_\lambda \leq 1.$$

Luego $u_\lambda - a \in A_{sa}$

Continuación de la demostración.

Ahora supongamos que $a \in A_+$, con $\|a\| < 1$. Entonces $0 \leq a \leq 1$, donde $1 \in \tilde{A}$, y por lo tanto

$$-1 \leq -a \leq u_\lambda - a \leq u_\lambda \leq 1.$$

Luego $u_\lambda - a \in A_{sa}$ y $\sigma(u_\lambda - a) \subseteq [-1, 1]$.

Continuación de la demostración.

Ahora supongamos que $a \in A_+$, con $\|a\| < 1$. Entonces $0 \leq a \leq 1$, donde $1 \in \tilde{A}$, y por lo tanto

$$-1 \leq -a \leq u_\lambda - a \leq u_\lambda \leq 1.$$

Luego $u_\lambda - a \in A_{sa}$ y $\sigma(u_\lambda - a) \subseteq [-1, 1]$. En consecuencia $\varphi(u_\lambda - a) \in \mathbb{R}$.

Continuación de la demostración.

Ahora supongamos que $a \in A_+$, con $\|a\| < 1$. Entonces $0 \leq a \leq 1$, donde $1 \in \tilde{A}$, y por lo tanto

$$-1 \leq -a \leq u_\lambda - a \leq u_\lambda \leq 1.$$

Luego $u_\lambda - a \in A_{sa}$ y $\sigma(u_\lambda - a) \subseteq [-1, 1]$. En consecuencia $\varphi(u_\lambda - a) \in \mathbb{R}$. Además:

Continuación de la demostración.

Ahora supongamos que $a \in A_+$, con $\|a\| < 1$. Entonces $0 \leq a \leq 1$, donde $1 \in \tilde{A}$, y por lo tanto

$$-1 \leq -a \leq u_\lambda - a \leq u_\lambda \leq 1.$$

Luego $u_\lambda - a \in A_{sa}$ y $\sigma(u_\lambda - a) \subseteq [-1, 1]$. En consecuencia $\varphi(u_\lambda - a) \in \mathbb{R}$. Además:

$$\varphi(u_\lambda - a) = \varphi(u_\lambda) - \varphi(a)$$

Continuación de la demostración.

Ahora supongamos que $a \in A_+$, con $\|a\| < 1$. Entonces $0 \leq a \leq 1$, donde $1 \in \tilde{A}$, y por lo tanto

$$-1 \leq -a \leq u_\lambda - a \leq u_\lambda \leq 1.$$

Luego $u_\lambda - a \in A_{sa}$ y $\sigma(u_\lambda - a) \subseteq [-1, 1]$. En consecuencia $\varphi(u_\lambda - a) \in \mathbb{R}$. Además:

$$\varphi(u_\lambda - a) = \varphi(u_\lambda) - \varphi(a) \rightarrow_\lambda 1 - \varphi(a).$$

Continuación de la demostración.

Ahora supongamos que $a \in A_+$, con $\|a\| < 1$. Entonces $0 \leq a \leq 1$, donde $1 \in \tilde{A}$, y por lo tanto

$$-1 \leq -a \leq u_\lambda - a \leq u_\lambda \leq 1.$$

Luego $u_\lambda - a \in A_{sa}$ y $\sigma(u_\lambda - a) \subseteq [-1, 1]$. En consecuencia $\varphi(u_\lambda - a) \in \mathbb{R}$. Además:

$$\varphi(u_\lambda - a) = \varphi(u_\lambda) - \varphi(a) \rightarrow_\lambda 1 - \varphi(a).$$

Como $\varphi(u_\lambda - a) \leq \|\varphi\| \|u_\lambda - a\| \leq 1$,

Continuación de la demostración.

Ahora supongamos que $a \in A_+$, con $\|a\| < 1$. Entonces $0 \leq a \leq 1$, donde $1 \in \tilde{A}$, y por lo tanto

$$-1 \leq -a \leq u_\lambda - a \leq u_\lambda \leq 1.$$

Luego $u_\lambda - a \in A_{sa}$ y $\sigma(u_\lambda - a) \subseteq [-1, 1]$. En consecuencia $\varphi(u_\lambda - a) \in \mathbb{R}$. Además:

$$\varphi(u_\lambda - a) = \varphi(u_\lambda) - \varphi(a) \rightarrow_\lambda 1 - \varphi(a).$$

Como $\varphi(u_\lambda - a) \leq \|\varphi\| \|u_\lambda - a\| \leq 1$, se concluye que $1 - \varphi(a) \leq 1$,

Continuación de la demostración.

Ahora supongamos que $a \in A_+$, con $\|a\| < 1$. Entonces $0 \leq a \leq 1$, donde $1 \in \tilde{A}$, y por lo tanto

$$-1 \leq -a \leq u_\lambda - a \leq u_\lambda \leq 1.$$

Luego $u_\lambda - a \in A_{sa}$ y $\sigma(u_\lambda - a) \subseteq [-1, 1]$. En consecuencia $\varphi(u_\lambda - a) \in \mathbb{R}$. Además:

$$\varphi(u_\lambda - a) = \varphi(u_\lambda) - \varphi(a) \rightarrow_\lambda 1 - \varphi(a).$$

Como $\varphi(u_\lambda - a) \leq \|\varphi\| \|u_\lambda - a\| \leq 1$, se concluye que $1 - \varphi(a) \leq 1$, y por lo tanto $\varphi(a) \geq 0$.

Continuación de la demostración.

Ahora supongamos que $a \in A_+$, con $\|a\| < 1$. Entonces $0 \leq a \leq 1$, donde $1 \in \tilde{A}$, y por lo tanto

$$-1 \leq -a \leq u_\lambda - a \leq u_\lambda \leq 1.$$

Luego $u_\lambda - a \in A_{sa}$ y $\sigma(u_\lambda - a) \subseteq [-1, 1]$. En consecuencia $\varphi(u_\lambda - a) \in \mathbb{R}$. Además:

$$\varphi(u_\lambda - a) = \varphi(u_\lambda) - \varphi(a) \rightarrow_\lambda 1 - \varphi(a).$$

Como $\varphi(u_\lambda - a) \leq \|\varphi\| \|u_\lambda - a\| \leq 1$, se concluye que $1 - \varphi(a) \leq 1$, y por lo tanto $\varphi(a) \geq 0$. Luego φ es positiva.

Corolario

Si A es una C^ -álgebra con unidad y $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ es una funcional lineal,*

Continuación de la demostración.

Ahora supongamos que $a \in A_+$, con $\|a\| < 1$. Entonces $0 \leq a \leq 1$, donde $1 \in \tilde{A}$, y por lo tanto

$$-1 \leq -a \leq u_\lambda - a \leq u_\lambda \leq 1.$$

Luego $u_\lambda - a \in A_{sa}$ y $\sigma(u_\lambda - a) \subseteq [-1, 1]$. En consecuencia $\varphi(u_\lambda - a) \in \mathbb{R}$. Además:

$$\varphi(u_\lambda - a) = \varphi(u_\lambda) - \varphi(a) \rightarrow_\lambda 1 - \varphi(a).$$

Como $\varphi(u_\lambda - a) \leq \|\varphi\| \|u_\lambda - a\| \leq 1$, se concluye que $1 - \varphi(a) \leq 1$, y por lo tanto $\varphi(a) \geq 0$. Luego φ es positiva.

Corolario

Si A es una C^ -álgebra con unidad y $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ es una funcional lineal,*

Continuación de la demostración.

Ahora supongamos que $a \in A_+$, con $\|a\| < 1$. Entonces $0 \leq a \leq 1$, donde $1 \in \tilde{A}$, y por lo tanto

$$-1 \leq -a \leq u_\lambda - a \leq u_\lambda \leq 1.$$

Luego $u_\lambda - a \in A_{sa}$ y $\sigma(u_\lambda - a) \subseteq [-1, 1]$. En consecuencia $\varphi(u_\lambda - a) \in \mathbb{R}$. Además:

$$\varphi(u_\lambda - a) = \varphi(u_\lambda) - \varphi(a) \rightarrow_\lambda 1 - \varphi(a).$$

Como $\varphi(u_\lambda - a) \leq \|\varphi\| \|u_\lambda - a\| \leq 1$, se concluye que $1 - \varphi(a) \leq 1$, y por lo tanto $\varphi(a) \geq 0$. Luego φ es positiva.

Corolario

Si A es una C^ -álgebra con unidad y $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ es una funcional lineal, entonces $\varphi \geq 0$ si y sólo si $\varphi(1) = \|\varphi\|$.*

Continuación de la demostración.

Ahora supongamos que $a \in A_+$, con $\|a\| < 1$. Entonces $0 \leq a \leq 1$, donde $1 \in \tilde{A}$, y por lo tanto

$$-1 \leq -a \leq u_\lambda - a \leq u_\lambda \leq 1.$$

Luego $u_\lambda - a \in A_{sa}$ y $\sigma(u_\lambda - a) \subseteq [-1, 1]$. En consecuencia $\varphi(u_\lambda - a) \in \mathbb{R}$. Además:

$$\varphi(u_\lambda - a) = \varphi(u_\lambda) - \varphi(a) \rightarrow_\lambda 1 - \varphi(a).$$

Como $\varphi(u_\lambda - a) \leq \|\varphi\| \|u_\lambda - a\| \leq 1$, se concluye que $1 - \varphi(a) \leq 1$, y por lo tanto $\varphi(a) \geq 0$. Luego φ es positiva.

Corolario

Si A es una C^ -álgebra con unidad y $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ es una funcional lineal, entonces $\varphi \geq 0$ si y sólo si $\varphi(1) = \|\varphi\|$.*

Corolario

Si A es una C^ -álgebra y $\varphi, \psi : A \rightarrow \mathbb{C}$ son funcionales lineales positivas,*

Corolario

Si A es una C^ -álgebra y $\varphi, \psi : A \rightarrow \mathbb{C}$ son funcionales lineales positivas,*

Corolario

Si A es una C^ -álgebra y $\varphi, \psi : A \rightarrow \mathbb{C}$ son funcionales lineales positivas, entonces $\varphi + \psi$ también lo es,*

Corolario

Si A es una C^ -álgebra y $\varphi, \psi : A \rightarrow \mathbb{C}$ son funcionales lineales positivas, entonces $\varphi + \psi$ también lo es, y además $\|\varphi + \psi\| = \|\varphi\| + \|\psi\|$.*

Corolario

Si A es una C^* -álgebra y $\varphi, \psi : A \rightarrow \mathbb{C}$ son funcionales lineales positivas, entonces $\varphi + \psi$ también lo es, y además $\|\varphi + \psi\| = \|\varphi\| + \|\psi\|$.

Demostración.

Corolario

Si A es una C^* -álgebra y $\varphi, \psi : A \rightarrow \mathbb{C}$ son funcionales lineales positivas, entonces $\varphi + \psi$ también lo es, y además $\|\varphi + \psi\| = \|\varphi\| + \|\psi\|$.

Demostración.

Corolario

Si A es una C^* -álgebra y $\varphi, \psi : A \rightarrow \mathbb{C}$ son funcionales lineales positivas, entonces $\varphi + \psi$ también lo es, y además $\|\varphi + \psi\| = \|\varphi\| + \|\psi\|$.

Demostración.

$$\|\varphi + \psi\| = \lim_{\lambda} (\varphi + \psi)(u_{\lambda})$$

Corolario

Si A es una C^* -álgebra y $\varphi, \psi : A \rightarrow \mathbb{C}$ son funcionales lineales positivas, entonces $\varphi + \psi$ también lo es, y además $\|\varphi + \psi\| = \|\varphi\| + \|\psi\|$.

Demostración.

$$\|\varphi + \psi\| = \lim_{\lambda} (\varphi + \psi)(u_{\lambda}) = \lim_{\lambda} \varphi(u_{\lambda}) + \lim_{\lambda} \psi(u_{\lambda})$$

Corolario

Si A es una C^* -álgebra y $\varphi, \psi : A \rightarrow \mathbb{C}$ son funcionales lineales positivas, entonces $\varphi + \psi$ también lo es, y además $\|\varphi + \psi\| = \|\varphi\| + \|\psi\|$.

Demostración.

$$\|\varphi + \psi\| = \lim_{\lambda} (\varphi + \psi)(u_{\lambda}) = \lim_{\lambda} \varphi(u_{\lambda}) + \lim_{\lambda} \psi(u_{\lambda}) = \|\varphi\| + \|\psi\|. \quad \square$$

Corolario

Si A es una C^* -álgebra y $\varphi, \psi : A \rightarrow \mathbb{C}$ son funcionales lineales positivas, entonces $\varphi + \psi$ también lo es, y además $\|\varphi + \psi\| = \|\varphi\| + \|\psi\|$.

Demostración.

$$\|\varphi + \psi\| = \lim_{\lambda} (\varphi + \psi)(u_{\lambda}) = \lim_{\lambda} \varphi(u_{\lambda}) + \lim_{\lambda} \psi(u_{\lambda}) = \|\varphi\| + \|\psi\|. \quad \square$$

Teorema de extensión de Hahn-Banach.

Corolario

Si A es una C^* -álgebra y $\varphi, \psi : A \rightarrow \mathbb{C}$ son funcionales lineales positivas, entonces $\varphi + \psi$ también lo es, y además $\|\varphi + \psi\| = \|\varphi\| + \|\psi\|$.

Demostración.

$$\|\varphi + \psi\| = \lim_{\lambda} (\varphi + \psi)(u_{\lambda}) = \lim_{\lambda} \varphi(u_{\lambda}) + \lim_{\lambda} \psi(u_{\lambda}) = \|\varphi\| + \|\psi\|. \quad \square$$

Teorema de extensión de Hahn-Banach. Recordar que si F es un subespacio vectorial de un espacio normado E

Corolario

Si A es una C^* -álgebra y $\varphi, \psi : A \rightarrow \mathbb{C}$ son funcionales lineales positivas, entonces $\varphi + \psi$ también lo es, y además $\|\varphi + \psi\| = \|\varphi\| + \|\psi\|$.

Demostración.

$$\|\varphi + \psi\| = \lim_{\lambda} (\varphi + \psi)(u_{\lambda}) = \lim_{\lambda} \varphi(u_{\lambda}) + \lim_{\lambda} \psi(u_{\lambda}) = \|\varphi\| + \|\psi\|. \quad \square$$

Teorema de extensión de Hahn-Banach. Recordar que si F es un subespacio vectorial de un espacio normado E y $\varphi : F \rightarrow \mathbb{C}$ es una funcional lineal continua,

Corolario

Si A es una C^* -álgebra y $\varphi, \psi : A \rightarrow \mathbb{C}$ son funcionales lineales positivas, entonces $\varphi + \psi$ también lo es, y además $\|\varphi + \psi\| = \|\varphi\| + \|\psi\|$.

Demostración.

$$\|\varphi + \psi\| = \lim_{\lambda} (\varphi + \psi)(u_{\lambda}) = \lim_{\lambda} \varphi(u_{\lambda}) + \lim_{\lambda} \psi(u_{\lambda}) = \|\varphi\| + \|\psi\|. \quad \square$$

Teorema de extensión de Hahn-Banach. Recordar que si F es un subespacio vectorial de un espacio normado E y $\varphi : F \rightarrow \mathbb{C}$ es una funcional lineal continua, entonces existe una funcional lineal continua $\tilde{\varphi} : E \rightarrow \mathbb{C}$ tal que:

Corolario

Si A es una C^* -álgebra y $\varphi, \psi : A \rightarrow \mathbb{C}$ son funcionales lineales positivas, entonces $\varphi + \psi$ también lo es, y además $\|\varphi + \psi\| = \|\varphi\| + \|\psi\|$.

Demostración.

$$\|\varphi + \psi\| = \lim_{\lambda} (\varphi + \psi)(u_{\lambda}) = \lim_{\lambda} \varphi(u_{\lambda}) + \lim_{\lambda} \psi(u_{\lambda}) = \|\varphi\| + \|\psi\|. \quad \square$$

Teorema de extensión de Hahn-Banach. Recordar que si F es un subespacio vectorial de un espacio normado E y $\varphi : F \rightarrow \mathbb{C}$ es una funcional lineal continua, entonces existe una funcional lineal continua $\tilde{\varphi} : E \rightarrow \mathbb{C}$ tal que:

$$\tilde{\varphi}|_F = \varphi$$

Corolario

Si A es una C^* -álgebra y $\varphi, \psi : A \rightarrow \mathbb{C}$ son funcionales lineales positivas, entonces $\varphi + \psi$ también lo es, y además $\|\varphi + \psi\| = \|\varphi\| + \|\psi\|$.

Demostración.

$$\|\varphi + \psi\| = \lim_{\lambda} (\varphi + \psi)(u_{\lambda}) = \lim_{\lambda} \varphi(u_{\lambda}) + \lim_{\lambda} \psi(u_{\lambda}) = \|\varphi\| + \|\psi\|. \quad \square$$

Teorema de extensión de Hahn-Banach. Recordar que si F es un subespacio vectorial de un espacio normado E y $\varphi : F \rightarrow \mathbb{C}$ es una funcional lineal continua, entonces existe una funcional lineal continua $\tilde{\varphi} : E \rightarrow \mathbb{C}$ tal que:

$$\tilde{\varphi}|_F = \varphi \quad \text{y} \quad \|\tilde{\varphi}\| = \|\varphi\|.$$

Corolario

Si A es una C^* -álgebra y $\varphi, \psi : A \rightarrow \mathbb{C}$ son funcionales lineales positivas, entonces $\varphi + \psi$ también lo es, y además $\|\varphi + \psi\| = \|\varphi\| + \|\psi\|$.

Demostración.

$$\|\varphi + \psi\| = \lim_{\lambda} (\varphi + \psi)(u_{\lambda}) = \lim_{\lambda} \varphi(u_{\lambda}) + \lim_{\lambda} \psi(u_{\lambda}) = \|\varphi\| + \|\psi\|. \quad \square$$

Teorema de extensión de Hahn-Banach. Recordar que si F es un subespacio vectorial de un espacio normado E y $\varphi : F \rightarrow \mathbb{C}$ es una funcional lineal continua, entonces existe una funcional lineal continua $\tilde{\varphi} : E \rightarrow \mathbb{C}$ tal que:

$$\tilde{\varphi}|_F = \varphi \quad \text{y} \quad \|\tilde{\varphi}\| = \|\varphi\|.$$

Se dice que $\tilde{\varphi}$ es una extensión de Hahn-Banach de φ .

Corolario

Sean B una C^ -subálgebra de la C^* -álgebra A , y $\varphi : B \rightarrow \mathbb{C}$ una funcional lineal positiva.*

Corolario

Sean B una C^ -subálgebra de la C^* -álgebra A , y $\varphi : B \rightarrow \mathbb{C}$ una funcional lineal positiva.*

Corolario

Sean B una C^ -subálgebra de la C^* -álgebra A , y $\varphi : B \rightarrow \mathbb{C}$ una funcional lineal positiva. Entonces existe una funcional lineal positiva $\psi : A \rightarrow \mathbb{C}$*

Corolario

Sean B una C^ -subálgebra de la C^* -álgebra A , y $\varphi : B \rightarrow \mathbb{C}$ una funcional lineal positiva. Entonces existe una funcional lineal positiva $\psi : A \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\psi|_B = \varphi$,*

Corolario

Sean B una C^ -subálgebra de la C^* -álgebra A , y $\varphi : B \rightarrow \mathbb{C}$ una funcional lineal positiva. Entonces existe una funcional lineal positiva $\psi : A \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\psi|_B = \varphi$, y $\|\psi\| = \|\varphi\|$.*

Corolario

Sean B una C^ -subálgebra de la C^* -álgebra A , y $\varphi : B \rightarrow \mathbb{C}$ una funcional lineal positiva. Entonces existe una funcional lineal positiva $\psi : A \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\psi|_B = \varphi$, y $\|\psi\| = \|\varphi\|$.*

Demostración.

Corolario

Sean B una C^ -subálgebra de la C^* -álgebra A , y $\varphi : B \rightarrow \mathbb{C}$ una funcional lineal positiva. Entonces existe una funcional lineal positiva $\psi : A \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\psi|_B = \varphi$, y $\|\psi\| = \|\varphi\|$.*

Demostración.

Corolario

Sean B una C^ -subálgebra de la C^* -álgebra A , y $\varphi : B \rightarrow \mathbb{C}$ una funcional lineal positiva. Entonces existe una funcional lineal positiva $\psi : A \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\psi|_B = \varphi$, y $\|\psi\| = \|\varphi\|$.*

Demostración.

Sean $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ las C^* -álgebras obtenidas de A y B adjuntando una unidad,

Corolario

Sean B una C^* -subálgebra de la C^* -álgebra A , y $\varphi : B \rightarrow \mathbb{C}$ una funcional lineal positiva. Entonces existe una funcional lineal positiva $\psi : A \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\psi|_B = \varphi$, y $\|\psi\| = \|\varphi\|$.

Demostración.

Sean $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ las C^* -álgebras obtenidas de A y B adjuntando una unidad, y $\tilde{\varphi} : \tilde{B} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\tilde{\varphi}(b + \lambda) = \varphi(b) + \lambda\|\varphi\|$.

Corolario

Sean B una C^* -subálgebra de la C^* -álgebra A , y $\varphi : B \rightarrow \mathbb{C}$ una funcional lineal positiva. Entonces existe una funcional lineal positiva $\psi : A \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\psi|_B = \varphi$, y $\|\psi\| = \|\varphi\|$.

Demostración.

Sean $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ las C^* -álgebras obtenidas de A y B adjuntando una unidad, y $\tilde{\varphi} : \tilde{B} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\tilde{\varphi}(b + \lambda) = \varphi(b) + \lambda\|\varphi\|$. Según hemos visto se tiene que $\tilde{\varphi} \geq 0$ y $\|\tilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$.

Corolario

Sean B una C^* -subálgebra de la C^* -álgebra A , y $\varphi : B \rightarrow \mathbb{C}$ una funcional lineal positiva. Entonces existe una funcional lineal positiva $\psi : A \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\psi|_B = \varphi$, y $\|\psi\| = \|\varphi\|$.

Demostración.

Sean $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ las C^* -álgebras obtenidas de A y B adjuntando una unidad, y $\tilde{\varphi} : \tilde{B} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\tilde{\varphi}(b + \lambda) = \varphi(b) + \lambda\|\varphi\|$. Según hemos visto se tiene que $\tilde{\varphi} \geq 0$ y $\|\tilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$. Considérese ahora cualquier extensión de Hahn-Banach $\tilde{\psi} : \tilde{A} \rightarrow \mathbb{C}$ de $\tilde{\varphi}$.

Corolario

Sean B una C^* -subálgebra de la C^* -álgebra A , y $\varphi : B \rightarrow \mathbb{C}$ una funcional lineal positiva. Entonces existe una funcional lineal positiva $\psi : A \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\psi|_B = \varphi$, y $\|\psi\| = \|\varphi\|$.

Demostración.

Sean $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ las C^* -álgebras obtenidas de A y B adjuntando una unidad, y $\tilde{\varphi} : \tilde{B} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\tilde{\varphi}(b + \lambda) = \varphi(b) + \lambda\|\varphi\|$. Según hemos visto se tiene que $\tilde{\varphi} \geq 0$ y $\|\tilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$. Considérese ahora cualquier extensión de Hahn-Banach $\tilde{\psi} : \tilde{A} \rightarrow \mathbb{C}$ de $\tilde{\varphi}$. Entonces

Corolario

Sean B una C^* -subálgebra de la C^* -álgebra A , y $\varphi : B \rightarrow \mathbb{C}$ una funcional lineal positiva. Entonces existe una funcional lineal positiva $\psi : A \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\psi|_B = \varphi$, y $\|\psi\| = \|\varphi\|$.

Demostración.

Sean $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ las C^* -álgebras obtenidas de A y B adjuntando una unidad, y $\tilde{\varphi} : \tilde{B} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\tilde{\varphi}(b + \lambda) = \varphi(b) + \lambda\|\varphi\|$. Según hemos visto se tiene que $\tilde{\varphi} \geq 0$ y $\|\tilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$. Considérese ahora cualquier extensión de Hahn-Banach $\tilde{\psi} : \tilde{A} \rightarrow \mathbb{C}$ de $\tilde{\varphi}$. Entonces

$$\tilde{\psi}(1) = \tilde{\varphi}(1)$$

Corolario

Sean B una C^* -subálgebra de la C^* -álgebra A , y $\varphi : B \rightarrow \mathbb{C}$ una funcional lineal positiva. Entonces existe una funcional lineal positiva $\psi : A \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\psi|_B = \varphi$, y $\|\psi\| = \|\varphi\|$.

Demostración.

Sean $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ las C^* -álgebras obtenidas de A y B adjuntando una unidad, y $\tilde{\varphi} : \tilde{B} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\tilde{\varphi}(b + \lambda) = \varphi(b) + \lambda\|\varphi\|$. Según hemos visto se tiene que $\tilde{\varphi} \geq 0$ y $\|\tilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$. Considérese ahora cualquier extensión de Hahn-Banach $\tilde{\psi} : \tilde{A} \rightarrow \mathbb{C}$ de $\tilde{\varphi}$. Entonces

$$\tilde{\psi}(1) = \tilde{\varphi}(1) = \|\tilde{\varphi}\|$$

Corolario

Sean B una C^* -subálgebra de la C^* -álgebra A , y $\varphi : B \rightarrow \mathbb{C}$ una funcional lineal positiva. Entonces existe una funcional lineal positiva $\psi : A \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\psi|_B = \varphi$, y $\|\psi\| = \|\varphi\|$.

Demostración.

Sean $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ las C^* -álgebras obtenidas de A y B adjuntando una unidad, y $\tilde{\varphi} : \tilde{B} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\tilde{\varphi}(b + \lambda) = \varphi(b) + \lambda\|\varphi\|$. Según hemos visto se tiene que $\tilde{\varphi} \geq 0$ y $\|\tilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$. Considérese ahora cualquier extensión de Hahn-Banach $\tilde{\psi} : \tilde{A} \rightarrow \mathbb{C}$ de $\tilde{\varphi}$. Entonces

$$\tilde{\psi}(1) = \tilde{\varphi}(1) = \|\tilde{\varphi}\| = \|\tilde{\psi}\|,$$

Corolario

Sean B una C^* -subálgebra de la C^* -álgebra A , y $\varphi : B \rightarrow \mathbb{C}$ una funcional lineal positiva. Entonces existe una funcional lineal positiva $\psi : A \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\psi|_B = \varphi$, y $\|\psi\| = \|\varphi\|$.

Demostración.

Sean $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ las C^* -álgebras obtenidas de A y B adjuntando una unidad, y $\tilde{\varphi} : \tilde{B} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\tilde{\varphi}(b + \lambda) = \varphi(b) + \lambda\|\varphi\|$. Según hemos visto se tiene que $\tilde{\varphi} \geq 0$ y $\|\tilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$. Considérese ahora cualquier extensión de Hahn-Banach $\tilde{\psi} : \tilde{A} \rightarrow \mathbb{C}$ de $\tilde{\varphi}$. Entonces

$$\tilde{\psi}(1) = \tilde{\varphi}(1) = \|\tilde{\varphi}\| = \|\tilde{\psi}\|,$$

de manera que $\tilde{\psi}$ es una funcional positiva.

Corolario

Sean B una C^* -subálgebra de la C^* -álgebra A , y $\varphi : B \rightarrow \mathbb{C}$ una funcional lineal positiva. Entonces existe una funcional lineal positiva $\psi : A \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\psi|_B = \varphi$, y $\|\psi\| = \|\varphi\|$.

Demostración.

Sean $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ las C^* -álgebras obtenidas de A y B adjuntando una unidad, y $\tilde{\varphi} : \tilde{B} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\tilde{\varphi}(b + \lambda) = \varphi(b) + \lambda\|\varphi\|$. Según hemos visto se tiene que $\tilde{\varphi} \geq 0$ y $\|\tilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$. Considérese ahora cualquier extensión de Hahn-Banach $\tilde{\psi} : \tilde{A} \rightarrow \mathbb{C}$ de $\tilde{\varphi}$. Entonces

$$\tilde{\psi}(1) = \tilde{\varphi}(1) = \|\tilde{\varphi}\| = \|\tilde{\psi}\|,$$

de manera que $\tilde{\psi}$ es una funcional positiva. Sea $\psi := \tilde{\psi}|_B$.

Corolario

Sean B una C^* -subálgebra de la C^* -álgebra A , y $\varphi : B \rightarrow \mathbb{C}$ una funcional lineal positiva. Entonces existe una funcional lineal positiva $\psi : A \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\psi|_B = \varphi$, y $\|\psi\| = \|\varphi\|$.

Demostración.

Sean $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ las C^* -álgebras obtenidas de A y B adjuntando una unidad, y $\tilde{\varphi} : \tilde{B} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\tilde{\varphi}(b + \lambda) = \varphi(b) + \lambda\|\varphi\|$. Según hemos visto se tiene que $\tilde{\varphi} \geq 0$ y $\|\tilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$. Considérese ahora cualquier extensión de Hahn-Banach $\tilde{\psi} : \tilde{A} \rightarrow \mathbb{C}$ de $\tilde{\varphi}$. Entonces

$$\tilde{\psi}(1) = \tilde{\varphi}(1) = \|\tilde{\varphi}\| = \|\tilde{\psi}\|,$$

de manera que $\tilde{\psi}$ es una funcional positiva. Sea $\psi := \tilde{\psi}|_B$. Entonces $\psi \geq 0$,

Corolario

Sean B una C^* -subálgebra de la C^* -álgebra A , y $\varphi : B \rightarrow \mathbb{C}$ una funcional lineal positiva. Entonces existe una funcional lineal positiva $\psi : A \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\psi|_B = \varphi$, y $\|\psi\| = \|\varphi\|$.

Demostración.

Sean $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ las C^* -álgebras obtenidas de A y B adjuntando una unidad, y $\tilde{\varphi} : \tilde{B} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\tilde{\varphi}(b + \lambda) = \varphi(b) + \lambda\|\varphi\|$. Según hemos visto se tiene que $\tilde{\varphi} \geq 0$ y $\|\tilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$. Considérese ahora cualquier extensión de Hahn-Banach $\tilde{\psi} : \tilde{A} \rightarrow \mathbb{C}$ de $\tilde{\varphi}$. Entonces

$$\tilde{\psi}(1) = \tilde{\varphi}(1) = \|\tilde{\varphi}\| = \|\tilde{\psi}\|,$$

de manera que $\tilde{\psi}$ es una funcional positiva. Sea $\psi := \tilde{\psi}|_B$. Entonces $\psi \geq 0$,

$$\psi|_B = \tilde{\psi}|_B$$

Corolario

Sean B una C^* -subálgebra de la C^* -álgebra A , y $\varphi : B \rightarrow \mathbb{C}$ una funcional lineal positiva. Entonces existe una funcional lineal positiva $\psi : A \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\psi|_B = \varphi$, y $\|\psi\| = \|\varphi\|$.

Demostración.

Sean $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ las C^* -álgebras obtenidas de A y B adjuntando una unidad, y $\tilde{\varphi} : \tilde{B} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\tilde{\varphi}(b + \lambda) = \varphi(b) + \lambda\|\varphi\|$. Según hemos visto se tiene que $\tilde{\varphi} \geq 0$ y $\|\tilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$. Considérese ahora cualquier extensión de Hahn-Banach $\tilde{\psi} : \tilde{A} \rightarrow \mathbb{C}$ de $\tilde{\varphi}$. Entonces

$$\tilde{\psi}(1) = \tilde{\varphi}(1) = \|\tilde{\varphi}\| = \|\tilde{\psi}\|,$$

de manera que $\tilde{\psi}$ es una funcional positiva. Sea $\psi := \tilde{\psi}|_B$. Entonces $\psi \geq 0$,

$$\psi|_B = \tilde{\psi}|_B = \tilde{\varphi}|_B$$

Corolario

Sean B una C^* -subálgebra de la C^* -álgebra A , y $\varphi : B \rightarrow \mathbb{C}$ una funcional lineal positiva. Entonces existe una funcional lineal positiva $\psi : A \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\psi|_B = \varphi$, y $\|\psi\| = \|\varphi\|$.

Demostración.

Sean $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ las C^* -álgebras obtenidas de A y B adjuntando una unidad, y $\tilde{\varphi} : \tilde{B} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\tilde{\varphi}(b + \lambda) = \varphi(b) + \lambda\|\varphi\|$. Según hemos visto se tiene que $\tilde{\varphi} \geq 0$ y $\|\tilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$. Considérese ahora cualquier extensión de Hahn-Banach $\tilde{\psi} : \tilde{A} \rightarrow \mathbb{C}$ de $\tilde{\varphi}$. Entonces

$$\tilde{\psi}(1) = \tilde{\varphi}(1) = \|\tilde{\varphi}\| = \|\tilde{\psi}\|,$$

de manera que $\tilde{\psi}$ es una funcional positiva. Sea $\psi := \tilde{\psi}|_B$. Entonces $\psi \geq 0$,

$$\psi|_B = \tilde{\psi}|_B = \tilde{\varphi}|_B = \varphi.$$

Corolario

Sean B una C^* -subálgebra de la C^* -álgebra A , y $\varphi : B \rightarrow \mathbb{C}$ una funcional lineal positiva. Entonces existe una funcional lineal positiva $\psi : A \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\psi|_B = \varphi$, y $\|\psi\| = \|\varphi\|$.

Demostración.

Sean $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ las C^* -álgebras obtenidas de A y B adjuntando una unidad, y $\tilde{\varphi} : \tilde{B} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\tilde{\varphi}(b + \lambda) = \varphi(b) + \lambda\|\varphi\|$. Según hemos visto se tiene que $\tilde{\varphi} \geq 0$ y $\|\tilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$. Considérese ahora cualquier extensión de Hahn-Banach $\tilde{\psi} : \tilde{A} \rightarrow \mathbb{C}$ de $\tilde{\varphi}$. Entonces

$$\tilde{\psi}(1) = \tilde{\varphi}(1) = \|\tilde{\varphi}\| = \|\tilde{\psi}\|,$$

de manera que $\tilde{\psi}$ es una funcional positiva. Sea $\psi := \tilde{\psi}|_B$. Entonces $\psi \geq 0$,

$$\psi|_B = \tilde{\psi}|_B = \tilde{\varphi}|_B = \varphi.$$

Además $\|\varphi\| \leq \|\psi\|$

Corolario

Sean B una C^* -subálgebra de la C^* -álgebra A , y $\varphi : B \rightarrow \mathbb{C}$ una funcional lineal positiva. Entonces existe una funcional lineal positiva $\psi : A \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\psi|_B = \varphi$, y $\|\psi\| = \|\varphi\|$.

Demostración.

Sean $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ las C^* -álgebras obtenidas de A y B adjuntando una unidad, y $\tilde{\varphi} : \tilde{B} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\tilde{\varphi}(b + \lambda) = \varphi(b) + \lambda\|\varphi\|$. Según hemos visto se tiene que $\tilde{\varphi} \geq 0$ y $\|\tilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$. Considérese ahora cualquier extensión de Hahn-Banach $\tilde{\psi} : \tilde{A} \rightarrow \mathbb{C}$ de $\tilde{\varphi}$. Entonces

$$\tilde{\psi}(1) = \tilde{\varphi}(1) = \|\tilde{\varphi}\| = \|\tilde{\psi}\|,$$

de manera que $\tilde{\psi}$ es una funcional positiva. Sea $\psi := \tilde{\psi}|_B$. Entonces $\psi \geq 0$,

$$\psi|_B = \tilde{\psi}|_B = \tilde{\varphi}|_B = \varphi.$$

Además $\|\varphi\| \leq \|\psi\| \leq \|\tilde{\psi}\|$

Corolario

Sean B una C^* -subálgebra de la C^* -álgebra A , y $\varphi : B \rightarrow \mathbb{C}$ una funcional lineal positiva. Entonces existe una funcional lineal positiva $\psi : A \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\psi|_B = \varphi$, y $\|\psi\| = \|\varphi\|$.

Demostración.

Sean $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ las C^* -álgebras obtenidas de A y B adjuntando una unidad, y $\tilde{\varphi} : \tilde{B} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\tilde{\varphi}(b + \lambda) = \varphi(b) + \lambda\|\varphi\|$. Según hemos visto se tiene que $\tilde{\varphi} \geq 0$ y $\|\tilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$. Considérese ahora cualquier extensión de Hahn-Banach $\tilde{\psi} : \tilde{A} \rightarrow \mathbb{C}$ de $\tilde{\varphi}$. Entonces

$$\tilde{\psi}(1) = \tilde{\varphi}(1) = \|\tilde{\varphi}\| = \|\tilde{\psi}\|,$$

de manera que $\tilde{\psi}$ es una funcional positiva. Sea $\psi := \tilde{\psi}|_B$. Entonces $\psi \geq 0$,

$$\psi|_B = \tilde{\psi}|_B = \tilde{\varphi}|_B = \varphi.$$

Además $\|\varphi\| \leq \|\psi\| \leq \|\tilde{\psi}\| = \|\tilde{\varphi}\|$

Corolario

Sean B una C^* -subálgebra de la C^* -álgebra A , y $\varphi : B \rightarrow \mathbb{C}$ una funcional lineal positiva. Entonces existe una funcional lineal positiva $\psi : A \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\psi|_B = \varphi$, y $\|\psi\| = \|\varphi\|$.

Demostración.

Sean $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ las C^* -álgebras obtenidas de A y B adjuntando una unidad, y $\tilde{\varphi} : \tilde{B} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\tilde{\varphi}(b + \lambda) = \varphi(b) + \lambda\|\varphi\|$. Según hemos visto se tiene que $\tilde{\varphi} \geq 0$ y $\|\tilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$. Considérese ahora cualquier extensión de Hahn-Banach $\tilde{\psi} : \tilde{A} \rightarrow \mathbb{C}$ de $\tilde{\varphi}$. Entonces

$$\tilde{\psi}(1) = \tilde{\varphi}(1) = \|\tilde{\varphi}\| = \|\tilde{\psi}\|,$$

de manera que $\tilde{\psi}$ es una funcional positiva. Sea $\psi := \tilde{\psi}|_B$. Entonces $\psi \geq 0$,

$$\psi|_B = \tilde{\psi}|_B = \tilde{\varphi}|_B = \varphi.$$

Además $\|\varphi\| \leq \|\psi\| \leq \|\tilde{\psi}\| = \|\tilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$.

Corolario

Sean B una C^* -subálgebra de la C^* -álgebra A , y $\varphi : B \rightarrow \mathbb{C}$ una funcional lineal positiva. Entonces existe una funcional lineal positiva $\psi : A \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\psi|_B = \varphi$, y $\|\psi\| = \|\varphi\|$.

Demostración.

Sean $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ las C^* -álgebras obtenidas de A y B adjuntando una unidad, y $\tilde{\varphi} : \tilde{B} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\tilde{\varphi}(b + \lambda) = \varphi(b) + \lambda\|\varphi\|$. Según hemos visto se tiene que $\tilde{\varphi} \geq 0$ y $\|\tilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$. Considérese ahora cualquier extensión de Hahn-Banach $\tilde{\psi} : \tilde{A} \rightarrow \mathbb{C}$ de $\tilde{\varphi}$. Entonces

$$\tilde{\psi}(1) = \tilde{\varphi}(1) = \|\tilde{\varphi}\| = \|\tilde{\psi}\|,$$

de manera que $\tilde{\psi}$ es una funcional positiva. Sea $\psi := \tilde{\psi}|_B$. Entonces $\psi \geq 0$,

$$\psi|_B = \tilde{\psi}|_B = \tilde{\varphi}|_B = \varphi.$$

Además $\|\varphi\| \leq \|\psi\| \leq \|\tilde{\psi}\| = \|\tilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$. Entonces $\|\varphi\| = \|\psi\|$. □

Definición

Un estado de la C^ -álgebra A es una funcional lineal positiva $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\|\varphi\| = 1$.*

Definición

Un estado de la C^ -álgebra A es una funcional lineal positiva $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\|\varphi\| = 1$.*

Definición

Un estado de la C^ -álgebra A es una funcional lineal positiva $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\|\varphi\| = 1$. Notación: $S(A) := \{\varphi : A \rightarrow \mathbb{C} : \varphi \text{ es un estado}\}$.*

Definición

Un estado de la C^ -álgebra A es una funcional lineal positiva $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\|\varphi\| = 1$. Notación: $S(A) := \{\varphi : A \rightarrow \mathbb{C} : \varphi \text{ es un estado}\}$.*

Notar que $S(A)$ es convexo: si $\varphi, \psi \in S(A)$ y $t \in [0, 1]$ entonces

Definición

Un estado de la C^ -álgebra A es una funcional lineal positiva $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\|\varphi\| = 1$. Notación: $S(A) := \{\varphi : A \rightarrow \mathbb{C} : \varphi \text{ es un estado}\}$.*

Notar que $S(A)$ es convexo: si $\varphi, \psi \in S(A)$ y $t \in [0, 1]$ entonces

$$\|(1-t)\varphi + t\psi\| = \|(1-t)\varphi\| + \|t\psi\|$$

Definición

Un estado de la C^ -álgebra A es una funcional lineal positiva $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\|\varphi\| = 1$. Notación: $S(A) := \{\varphi : A \rightarrow \mathbb{C} : \varphi \text{ es un estado}\}$.*

Notar que $S(A)$ es convexo: si $\varphi, \psi \in S(A)$ y $t \in [0, 1]$ entonces

$$\|(1-t)\varphi + t\psi\| = \|(1-t)\varphi\| + \|t\psi\| = (1-t)\|\varphi\| + t\|\psi\|$$

Definición

Un estado de la C^ -álgebra A es una funcional lineal positiva $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\|\varphi\| = 1$. Notación: $S(A) := \{\varphi : A \rightarrow \mathbb{C} : \varphi \text{ es un estado}\}$.*

Notar que $S(A)$ es convexo: si $\varphi, \psi \in S(A)$ y $t \in [0, 1]$ entonces

$$\|(1-t)\varphi + t\psi\| = \|(1-t)\varphi\| + \|t\psi\| = (1-t)\|\varphi\| + t\|\psi\| = (1-t) + t$$

Definición

Un estado de la C^ -álgebra A es una funcional lineal positiva $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\|\varphi\| = 1$. Notación: $S(A) := \{\varphi : A \rightarrow \mathbb{C} : \varphi \text{ es un estado}\}$.*

Notar que $S(A)$ es convexo: si $\varphi, \psi \in S(A)$ y $t \in [0, 1]$ entonces

$$\|(1-t)\varphi + t\psi\| = \|(1-t)\varphi\| + \|t\psi\| = (1-t)\|\varphi\| + t\|\psi\| = (1-t) + t = 1.$$

Definición

Un estado de la C^ -álgebra A es una funcional lineal positiva $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\|\varphi\| = 1$. Notación: $S(A) := \{\varphi : A \rightarrow \mathbb{C} : \varphi \text{ es un estado}\}$.*

Notar que $S(A)$ es convexo: si $\varphi, \psi \in S(A)$ y $t \in [0, 1]$ entonces

$$\|(1-t)\varphi + t\psi\| = \|(1-t)\varphi\| + \|t\psi\| = (1-t)\|\varphi\| + t\|\psi\| = (1-t) + t = 1.$$

Corolario

Si $a \in A$ es normal,

Definición

Un estado de la C^* -álgebra A es una funcional lineal positiva $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\|\varphi\| = 1$. Notación: $S(A) := \{\varphi : A \rightarrow \mathbb{C} : \varphi \text{ es un estado}\}$.

Notar que $S(A)$ es convexo: si $\varphi, \psi \in S(A)$ y $t \in [0, 1]$ entonces

$$\|(1-t)\varphi + t\psi\| = \|(1-t)\varphi\| + \|t\psi\| = (1-t)\|\varphi\| + t\|\psi\| = (1-t) + t = 1.$$

Corolario

Si $a \in A$ es normal,

Definición

Un estado de la C^* -álgebra A es una funcional lineal positiva $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\|\varphi\| = 1$. Notación: $S(A) := \{\varphi : A \rightarrow \mathbb{C} : \varphi \text{ es un estado}\}$.

Notar que $S(A)$ es convexo: si $\varphi, \psi \in S(A)$ y $t \in [0, 1]$ entonces

$$\|(1-t)\varphi + t\psi\| = \|(1-t)\varphi\| + \|t\psi\| = (1-t)\|\varphi\| + t\|\psi\| = (1-t) + t = 1.$$

Corolario

Si $a \in A$ es normal, entonces $\exists \varphi \in S(A)$ tal que

Definición

Un estado de la C^* -álgebra A es una funcional lineal positiva $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\|\varphi\| = 1$. Notación: $S(A) := \{\varphi : A \rightarrow \mathbb{C} : \varphi \text{ es un estado}\}$.

Notar que $S(A)$ es convexo: si $\varphi, \psi \in S(A)$ y $t \in [0, 1]$ entonces

$$\|(1-t)\varphi + t\psi\| = \|(1-t)\varphi\| + \|t\psi\| = (1-t)\|\varphi\| + t\|\psi\| = (1-t) + t = 1.$$

Corolario

Si $a \in A$ es normal, entonces $\exists \varphi \in S(A)$ tal que $|\varphi(a)| = \|a\|$ y $\|\varphi\| = 1$.

Definición

Un estado de la C^* -álgebra A es una funcional lineal positiva $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\|\varphi\| = 1$. Notación: $S(A) := \{\varphi : A \rightarrow \mathbb{C} : \varphi \text{ es un estado}\}$.

Notar que $S(A)$ es convexo: si $\varphi, \psi \in S(A)$ y $t \in [0, 1]$ entonces

$$\|(1-t)\varphi + t\psi\| = \|(1-t)\varphi\| + \|t\psi\| = (1-t)\|\varphi\| + t\|\psi\| = (1-t) + t = 1.$$

Corolario

Si $a \in A$ es normal, entonces $\exists \varphi \in S(A)$ tal que $|\varphi(a)| = \|a\|$ y $\|\varphi\| = 1$.

Demostración.

Definición

Un estado de la C^* -álgebra A es una funcional lineal positiva $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\|\varphi\| = 1$. Notación: $S(A) := \{\varphi : A \rightarrow \mathbb{C} : \varphi \text{ es un estado}\}$.

Notar que $S(A)$ es convexo: si $\varphi, \psi \in S(A)$ y $t \in [0, 1]$ entonces

$$\|(1-t)\varphi + t\psi\| = \|(1-t)\varphi\| + \|t\psi\| = (1-t)\|\varphi\| + t\|\psi\| = (1-t) + t = 1.$$

Corolario

Si $a \in A$ es normal, entonces $\exists \varphi \in S(A)$ tal que $|\varphi(a)| = \|a\|$ y $\|\varphi\| = 1$.

Demostración. Sea $B \subseteq A$ la C^* -álgebra generada por a .

Definición

Un estado de la C^* -álgebra A es una funcional lineal positiva $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\|\varphi\| = 1$. Notación: $S(A) := \{\varphi : A \rightarrow \mathbb{C} : \varphi \text{ es un estado}\}$.

Notar que $S(A)$ es convexo: si $\varphi, \psi \in S(A)$ y $t \in [0, 1]$ entonces

$$\|(1-t)\varphi + t\psi\| = \|(1-t)\varphi\| + \|t\psi\| = (1-t)\|\varphi\| + t\|\psi\| = (1-t) + t = 1.$$

Corolario

Si $a \in A$ es normal, entonces $\exists \varphi \in S(A)$ tal que $|\varphi(a)| = \|a\|$ y $\|\varphi\| = 1$.

Demostración. Sea $B \subseteq A$ la C^* -álgebra generada por a . Entonces B es conmutativa

Definición

Un estado de la C^* -álgebra A es una funcional lineal positiva $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\|\varphi\| = 1$. Notación: $S(A) := \{\varphi : A \rightarrow \mathbb{C} : \varphi \text{ es un estado}\}$.

Notar que $S(A)$ es convexo: si $\varphi, \psi \in S(A)$ y $t \in [0, 1]$ entonces

$$\|(1-t)\varphi + t\psi\| = \|(1-t)\varphi\| + \|t\psi\| = (1-t)\|\varphi\| + t\|\psi\| = (1-t) + t = 1.$$

Corolario

Si $a \in A$ es normal, entonces $\exists \varphi \in S(A)$ tal que $|\varphi(a)| = \|a\|$ y $\|\varphi\| = 1$.

Demostración. Sea $B \subseteq A$ la C^* -álgebra generada por a . Entonces B es conmutativa y por lo tanto $B \cong C_0(\widehat{B})$.

Definición

Un estado de la C^* -álgebra A es una funcional lineal positiva $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\|\varphi\| = 1$. Notación: $S(A) := \{\varphi : A \rightarrow \mathbb{C} : \varphi \text{ es un estado}\}$.

Notar que $S(A)$ es convexo: si $\varphi, \psi \in S(A)$ y $t \in [0, 1]$ entonces

$$\|(1-t)\varphi + t\psi\| = \|(1-t)\varphi\| + \|t\psi\| = (1-t)\|\varphi\| + t\|\psi\| = (1-t) + t = 1.$$

Corolario

Si $a \in A$ es normal, entonces $\exists \varphi \in S(A)$ tal que $|\varphi(a)| = \|a\|$ y $\|\varphi\| = 1$.

Demostración. Sea $B \subseteq A$ la C^* -álgebra generada por a . Entonces B es conmutativa y por lo tanto $B \cong C_0(\widehat{B})$. Como $\|a\| = \|\hat{a}\|_\infty$ y $\hat{a} \in C_0(\widehat{B})$,

Definición

Un estado de la C^* -álgebra A es una funcional lineal positiva $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\|\varphi\| = 1$. Notación: $S(A) := \{\varphi : A \rightarrow \mathbb{C} : \varphi \text{ es un estado}\}$.

Notar que $S(A)$ es convexo: si $\varphi, \psi \in S(A)$ y $t \in [0, 1]$ entonces

$$\|(1-t)\varphi + t\psi\| = \|(1-t)\varphi\| + \|t\psi\| = (1-t)\|\varphi\| + t\|\psi\| = (1-t) + t = 1.$$

Corolario

Si $a \in A$ es normal, entonces $\exists \varphi \in S(A)$ tal que $|\varphi(a)| = \|a\|$ y $\|\varphi\| = 1$.

Demostración. Sea $B \subseteq A$ la C^* -álgebra generada por a . Entonces B es conmutativa y por lo tanto $B \cong C_0(\widehat{B})$. Como $\|a\| = \|\hat{a}\|_\infty$ y $\hat{a} \in C_0(\widehat{B})$, existe $h \in \widehat{B}$ tal que $|\hat{a}(h)| = \|a\|$,

Definición

Un estado de la C^* -álgebra A es una funcional lineal positiva $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\|\varphi\| = 1$. Notación: $S(A) := \{\varphi : A \rightarrow \mathbb{C} : \varphi \text{ es un estado}\}$.

Notar que $S(A)$ es convexo: si $\varphi, \psi \in S(A)$ y $t \in [0, 1]$ entonces

$$\|(1-t)\varphi + t\psi\| = \|(1-t)\varphi\| + \|t\psi\| = (1-t)\|\varphi\| + t\|\psi\| = (1-t) + t = 1.$$

Corolario

Si $a \in A$ es normal, entonces $\exists \varphi \in S(A)$ tal que $|\varphi(a)| = \|a\|$ y $\|\varphi\| = 1$.

Demostración. Sea $B \subseteq A$ la C^* -álgebra generada por a . Entonces B es conmutativa y por lo tanto $B \cong C_0(\widehat{B})$. Como $\|a\| = \|\hat{a}\|_\infty$ y $\hat{a} \in C_0(\widehat{B})$, existe $h \in \widehat{B}$ tal que $|\hat{a}(h)| = \|a\|$, es decir $|h(a)| = \|a\|$.

Definición

Un estado de la C^* -álgebra A es una funcional lineal positiva $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\|\varphi\| = 1$. Notación: $S(A) := \{\varphi : A \rightarrow \mathbb{C} : \varphi \text{ es un estado}\}$.

Notar que $S(A)$ es convexo: si $\varphi, \psi \in S(A)$ y $t \in [0, 1]$ entonces

$$\|(1-t)\varphi + t\psi\| = \|(1-t)\varphi\| + \|t\psi\| = (1-t)\|\varphi\| + t\|\psi\| = (1-t) + t = 1.$$

Corolario

Si $a \in A$ es normal, entonces $\exists \varphi \in S(A)$ tal que $|\varphi(a)| = \|a\|$ y $\|\varphi\| = 1$.

Demostración. Sea $B \subseteq A$ la C^* -álgebra generada por a . Entonces B es conmutativa y por lo tanto $B \cong C_0(\widehat{B})$. Como $\|a\| = \|\hat{a}\|_\infty$ y $\hat{a} \in C_0(\widehat{B})$, existe $h \in \widehat{B}$ tal que $|\hat{a}(h)| = \|a\|$, es decir $|h(a)| = \|a\|$. Además $\|h\| = 1$ y $h \geq 0$.

Definición

Un estado de la C^* -álgebra A es una funcional lineal positiva $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\|\varphi\| = 1$. Notación: $S(A) := \{\varphi : A \rightarrow \mathbb{C} : \varphi \text{ es un estado}\}$.

Notar que $S(A)$ es convexo: si $\varphi, \psi \in S(A)$ y $t \in [0, 1]$ entonces

$$\|(1-t)\varphi + t\psi\| = \|(1-t)\varphi\| + \|t\psi\| = (1-t)\|\varphi\| + t\|\psi\| = (1-t) + t = 1.$$

Corolario

Si $a \in A$ es normal, entonces $\exists \varphi \in S(A)$ tal que $|\varphi(a)| = \|a\|$ y $\|\varphi\| = 1$.

Demostración. Sea $B \subseteq A$ la C^* -álgebra generada por a . Entonces B es conmutativa y por lo tanto $B \cong C_0(\widehat{B})$. Como $\|a\| = \|\hat{a}\|_\infty$ y $\hat{a} \in C_0(\widehat{B})$, existe $h \in \widehat{B}$ tal que $|\hat{a}(h)| = \|a\|$, es decir $|h(a)| = \|a\|$. Además $\|h\| = 1$ y $h \geq 0$. Entonces existe una funcional lineal positiva $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\varphi|_B = h$

Definición

Un estado de la C^* -álgebra A es una funcional lineal positiva $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\|\varphi\| = 1$. Notación: $S(A) := \{\varphi : A \rightarrow \mathbb{C} : \varphi \text{ es un estado}\}$.

Notar que $S(A)$ es convexo: si $\varphi, \psi \in S(A)$ y $t \in [0, 1]$ entonces

$$\|(1-t)\varphi + t\psi\| = \|(1-t)\varphi\| + \|t\psi\| = (1-t)\|\varphi\| + t\|\psi\| = (1-t) + t = 1.$$

Corolario

Si $a \in A$ es normal, entonces $\exists \varphi \in S(A)$ tal que $|\varphi(a)| = \|a\|$ y $\|\varphi\| = 1$.

Demostración. Sea $B \subseteq A$ la C^* -álgebra generada por a . Entonces B es conmutativa y por lo tanto $B \cong C_0(\widehat{B})$. Como $\|a\| = \|\hat{a}\|_\infty$ y $\hat{a} \in C_0(\widehat{B})$, existe $h \in \widehat{B}$ tal que $|\hat{a}(h)| = \|a\|$, es decir $|h(a)| = \|a\|$. Además $\|h\| = 1$ y $h \geq 0$. Entonces existe una funcional lineal positiva $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\varphi|_B = h$ y $\|\varphi\| = \|h\| = 1$.

Definición

Un estado de la C^* -álgebra A es una funcional lineal positiva $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\|\varphi\| = 1$. Notación: $S(A) := \{\varphi : A \rightarrow \mathbb{C} : \varphi \text{ es un estado}\}$.

Notar que $S(A)$ es convexo: si $\varphi, \psi \in S(A)$ y $t \in [0, 1]$ entonces

$$\|(1-t)\varphi + t\psi\| = \|(1-t)\varphi\| + \|t\psi\| = (1-t)\|\varphi\| + t\|\psi\| = (1-t) + t = 1.$$

Corolario

Si $a \in A$ es normal, entonces $\exists \varphi \in S(A)$ tal que $|\varphi(a)| = \|a\|$ y $\|\varphi\| = 1$.

Demostración. Sea $B \subseteq A$ la C^* -álgebra generada por a . Entonces B es conmutativa y por lo tanto $B \cong C_0(\widehat{B})$. Como $\|a\| = \|\hat{a}\|_\infty$ y $\hat{a} \in C_0(\widehat{B})$, existe $h \in \widehat{B}$ tal que $|\hat{a}(h)| = \|a\|$, es decir $|h(a)| = \|a\|$. Además $\|h\| = 1$ y $h \geq 0$. Entonces existe una funcional lineal positiva $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\varphi|_B = h$ y $\|\varphi\| = \|h\| = 1$. Finalmente: $|\varphi(a)| = |h(a)| = \|a\|$.

Teorema de Gelfand–Naimark

Definición (Suma directa de representaciones)

Teorema de Gelfand–Naimark

Definición (Suma directa de representaciones)

Teorema de Gelfand–Naimark

Definición (Suma directa de representaciones)

Sean A una C^ -álgebra y $\{\pi_i : A \rightarrow B(\mathcal{H}_i)\}_{i \in I}$ una familia de representaciones de A .*

Definición (Suma directa de representaciones)

Sean A una C^ -álgebra y $\{\pi_i : A \rightarrow B(\mathcal{H}_i)\}_{i \in I}$ una familia de representaciones de A . Definimos el espacio suma directa como*

Teorema de Gelfand–Naimark

Definición (Suma directa de representaciones)

Sean A una C^* -álgebra y $\{\pi_i : A \rightarrow B(\mathcal{H}_i)\}_{i \in I}$ una familia de representaciones de A . Definimos el espacio suma directa como

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{i \in I} \mathcal{H}_i = \left\{ \xi : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} \mathcal{H}_i : \xi(i) \in \mathcal{H}_i \forall i, \text{ y } \sum_{i \in I} \|\xi(i)\|^2 < \infty \right\}.$$

Teorema de Gelfand–Naimark

Definición (Suma directa de representaciones)

Sean A una C^* -álgebra y $\{\pi_i : A \rightarrow B(\mathcal{H}_i)\}_{i \in I}$ una familia de representaciones de A . Definimos el espacio suma directa como

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{i \in I} \mathcal{H}_i = \left\{ \xi : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} \mathcal{H}_i : \xi(i) \in \mathcal{H}_i \forall i, \text{ y } \sum_{i \in I} \|\xi(i)\|^2 < \infty \right\}.$$

El espacio $\mathcal{H}$ es también un espacio de Hilbert con el producto interno

Teorema de Gelfand–Naimark

Definición (Suma directa de representaciones)

Sean A una C^* -álgebra y $\{\pi_i : A \rightarrow B(\mathcal{H}_i)\}_{i \in I}$ una familia de representaciones de A . Definimos el espacio suma directa como

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{i \in I} \mathcal{H}_i = \left\{ \xi : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} \mathcal{H}_i : \xi(i) \in \mathcal{H}_i \forall i, \text{ y } \sum_{i \in I} \|\xi(i)\|^2 < \infty \right\}.$$

El espacio $\mathcal{H}$ es también un espacio de Hilbert con el producto interno

$$\langle \xi, \eta \rangle := \sum_{i \in I} \langle \xi(i), \eta(i) \rangle_{\mathcal{H}_i}.$$

Teorema de Gelfand–Naimark

Definición (Suma directa de representaciones)

Sean A una C^* -álgebra y $\{\pi_i : A \rightarrow B(\mathcal{H}_i)\}_{i \in I}$ una familia de representaciones de A . Definimos el espacio suma directa como

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{i \in I} \mathcal{H}_i = \left\{ \xi : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} \mathcal{H}_i : \xi(i) \in \mathcal{H}_i \forall i, \text{ y } \sum_{i \in I} \|\xi(i)\|^2 < \infty \right\}.$$

El espacio $\mathcal{H}$ es también un espacio de Hilbert con el producto interno

$$\langle \xi, \eta \rangle := \sum_{i \in I} \langle \xi(i), \eta(i) \rangle_{\mathcal{H}_i}.$$

Si $T_i \in B(\mathcal{H}_i)$, para todo $i \in I$ y existe M tal que $\|T_i\| \leq M$ para todo i , entonces $T := \bigoplus_{i \in I} T_i \in B(\mathcal{H})$ donde $(T\xi)(i) = T_i(\xi(i))$.

Teorema de Gelfand–Naimark

Definición (Suma directa de representaciones)

Sean A una C^* -álgebra y $\{\pi_i : A \rightarrow B(\mathcal{H}_i)\}_{i \in I}$ una familia de representaciones de A . Definimos el espacio suma directa como

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{i \in I} \mathcal{H}_i = \left\{ \xi : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} \mathcal{H}_i : \xi(i) \in \mathcal{H}_i \forall i, \text{ y } \sum_{i \in I} \|\xi(i)\|^2 < \infty \right\}.$$

El espacio $\mathcal{H}$ es también un espacio de Hilbert con el producto interno

$$\langle \xi, \eta \rangle := \sum_{i \in I} \langle \xi(i), \eta(i) \rangle_{\mathcal{H}_i}.$$

Si $T_i \in B(\mathcal{H}_i)$, para todo $i \in I$ y existe M tal que $\|T_i\| \leq M$ para todo i , entonces $T := \bigoplus_{i \in I} T_i \in B(\mathcal{H})$ donde $(T\xi)(i) = T_i(\xi(i))$.

Se define $\pi = \bigoplus_{i \in I} \pi_i : A \rightarrow B(\mathcal{H})$ como $\pi(a) = \bigoplus_{i \in I} \pi_i(a)$. Entonces $(\bigoplus \pi_i, \bigoplus \mathcal{H}_i)$ se llama suma directa de la familia $(\pi_i, \mathcal{H}_i)_{i \in I}$.

Definición

Sea A una C^ -álgebra.*

Definición

Sea A una C^ -álgebra.*

Definición

Sea A una C^* -álgebra. La *representación universal* de A es

Definición

Sea A una C^* -álgebra. La *representación universal* de A es

$$\pi_u := \bigoplus_{\varphi \in S(A)} \pi_\varphi,$$

Definición

Sea A una C^* -álgebra. La *representación universal* de A es

$$\pi_u := \bigoplus_{\varphi \in S(A)} \pi_\varphi,$$

donde π_φ es la representación GNS de φ y $\mathcal{H}_u := \bigoplus_{\varphi \in S(A)} \mathcal{H}_\varphi$.

Definición

Sea A una C^* -álgebra. La *representación universal* de A es

$$\pi_u := \bigoplus_{\varphi \in S(A)} \pi_\varphi,$$

donde π_φ es la representación GNS de φ y $\mathcal{H}_u := \bigoplus_{\varphi \in S(A)} \mathcal{H}_\varphi$.

Teorema (Gelfand-Naimark)

La representación universal es fiel.

Definición

Sea A una C^* -álgebra. La *representación universal* de A es

$$\pi_u := \bigoplus_{\varphi \in S(A)} \pi_\varphi,$$

donde π_φ es la representación GNS de φ y $\mathcal{H}_u := \bigoplus_{\varphi \in S(A)} \mathcal{H}_\varphi$.

Teorema (Gelfand-Naimark)

La representación universal es fiel.

Definición

Sea A una C^* -álgebra. La *representación universal* de A es

$$\pi_u := \bigoplus_{\varphi \in S(A)} \pi_\varphi,$$

donde π_φ es la representación GNS de φ y $\mathcal{H}_u := \bigoplus_{\varphi \in S(A)} \mathcal{H}_\varphi$.

Teorema (Gelfand-Naimark)

La *representación universal* es fiel.

Demostración.

Definición

Sea A una C^* -álgebra. La *representación universal* de A es

$$\pi_u := \bigoplus_{\varphi \in S(A)} \pi_\varphi,$$

donde π_φ es la representación GNS de φ y $\mathcal{H}_u := \bigoplus_{\varphi \in S(A)} \mathcal{H}_\varphi$.

Teorema (Gelfand-Naimark)

La *representación universal* es fiel.

Demostración.

Definición

Sea A una C^* -álgebra. La *representación universal* de A es

$$\pi_u := \bigoplus_{\varphi \in S(A)} \pi_\varphi,$$

donde π_φ es la representación GNS de φ y $\mathcal{H}_u := \bigoplus_{\varphi \in S(A)} \mathcal{H}_\varphi$.

Teorema (Gelfand-Naimark)

La representación universal es fiel.

Demostración.

Sea $a \in A$, $a \neq 0$;

Definición

Sea A una C^* -álgebra. La *representación universal* de A es

$$\pi_u := \bigoplus_{\varphi \in S(A)} \pi_\varphi,$$

donde π_φ es la representación GNS de φ y $\mathcal{H}_u := \bigoplus_{\varphi \in S(A)} \mathcal{H}_\varphi$.

Teorema (Gelfand-Naimark)

La *representación universal* es fiel.

Demostración.

Sea $a \in A$, $a \neq 0$; entonces $a^*a \in A_+$ y no es nulo.

Definición

Sea A una C^* -álgebra. La *representación universal* de A es

$$\pi_u := \bigoplus_{\varphi \in S(A)} \pi_\varphi,$$

donde π_φ es la representación GNS de φ y $\mathcal{H}_u := \bigoplus_{\varphi \in S(A)} \mathcal{H}_\varphi$.

Teorema (Gelfand-Naimark)

La representación universal es fiel.

Demostración.

Sea $a \in A$, $a \neq 0$; entonces $a^*a \in A_+$ y no es nulo. Entonces existe un estado $\varphi \in S(A)$ tal que $\varphi(a^*a) = \|a^*a\| = \|a\|^2$.

Definición

Sea A una C^* -álgebra. La *representación universal* de A es

$$\pi_u := \bigoplus_{\varphi \in S(A)} \pi_\varphi,$$

donde π_φ es la representación GNS de φ y $\mathcal{H}_u := \bigoplus_{\varphi \in S(A)} \mathcal{H}_\varphi$.

Teorema (Gelfand-Naimark)

La representación universal es fiel.

Demostración.

Sea $a \in A$, $a \neq 0$; entonces $a^*a \in A_+$ y no es nulo. Entonces existe un estado $\varphi \in S(A)$ tal que $\varphi(a^*a) = \|a^*a\| = \|a\|^2$. Sea $(\pi_\varphi, \mathcal{H}_\varphi, \xi_\varphi)$ la GNS de φ , y sea

Definición

Sea A una C^* -álgebra. La *representación universal* de A es

$$\pi_u := \bigoplus_{\varphi \in S(A)} \pi_\varphi,$$

donde π_φ es la representación GNS de φ y $\mathcal{H}_u := \bigoplus_{\varphi \in S(A)} \mathcal{H}_\varphi$.

Teorema (Gelfand-Naimark)

La *representación universal* es fiel.

Demostración.

Sea $a \in A$, $a \neq 0$; entonces $a^*a \in A_+$ y no es nulo. Entonces existe un estado $\varphi \in S(A)$ tal que $\varphi(a^*a) = \|a^*a\| = \|a\|^2$. Sea $(\pi_\varphi, \mathcal{H}_\varphi, \xi_\varphi)$ la GNS de φ , y sea

$$\xi : S(A) \rightarrow \bigcup_{\psi \in S(A)} \mathcal{H}_\psi \text{ tal que}$$

Definición

Sea A una C^* -álgebra. La *representación universal* de A es

$$\pi_u := \bigoplus_{\varphi \in S(A)} \pi_\varphi,$$

donde π_φ es la representación GNS de φ y $\mathcal{H}_u := \bigoplus_{\varphi \in S(A)} \mathcal{H}_\varphi$.

Teorema (Gelfand-Naimark)

La *representación universal* es fiel.

Demostración.

Sea $a \in A$, $a \neq 0$; entonces $a^*a \in A_+$ y no es nulo. Entonces existe un estado $\varphi \in S(A)$ tal que $\varphi(a^*a) = \|a^*a\| = \|a\|^2$. Sea $(\pi_\varphi, \mathcal{H}_\varphi, \xi_\varphi)$ la GNS de φ , y sea

$$\xi : S(A) \rightarrow \bigcup_{\psi \in S(A)} \mathcal{H}_\psi \text{ tal que } \xi(\psi) = \begin{cases} 0 & \text{si } \psi \neq \varphi, \\ \xi_\varphi & \text{si } \psi = \varphi. \end{cases}$$

Definición

Sea A una C^* -álgebra. La *representación universal* de A es

$$\pi_u := \bigoplus_{\varphi \in S(A)} \pi_\varphi,$$

donde π_φ es la representación GNS de φ y $\mathcal{H}_u := \bigoplus_{\varphi \in S(A)} \mathcal{H}_\varphi$.

Teorema (Gelfand-Naimark)

La *representación universal* es fiel.

Demostración.

Sea $a \in A$, $a \neq 0$; entonces $a^*a \in A_+$ y no es nulo. Entonces existe un estado $\varphi \in S(A)$ tal que $\varphi(a^*a) = \|a^*a\| = \|a\|^2$. Sea $(\pi_\varphi, \mathcal{H}_\varphi, \xi_\varphi)$ la GNS de φ , y sea

$$\xi : S(A) \rightarrow \bigcup_{\psi \in S(A)} \mathcal{H}_\psi \text{ tal que } \xi(\psi) = \begin{cases} 0 & \text{si } \psi \neq \varphi, \\ \xi_\varphi & \text{si } \psi = \varphi. \end{cases}$$

Entonces $\xi \in \bigoplus_{\psi \in S(A)} \mathcal{H}_\psi = \mathcal{H}_u$.

Definición

Sea A una C^* -álgebra. La *representación universal* de A es

$$\pi_u := \bigoplus_{\varphi \in S(A)} \pi_\varphi,$$

donde π_φ es la representación GNS de φ y $\mathcal{H}_u := \bigoplus_{\varphi \in S(A)} \mathcal{H}_\varphi$.

Teorema (Gelfand-Naimark)

La *representación universal* es fiel.

Demostración.

Sea $a \in A$, $a \neq 0$; entonces $a^*a \in A_+$ y no es nulo. Entonces existe un estado $\varphi \in S(A)$ tal que $\varphi(a^*a) = \|a^*a\| = \|a\|^2$. Sea $(\pi_\varphi, \mathcal{H}_\varphi, \xi_\varphi)$ la GNS de φ , y sea

$$\xi : S(A) \rightarrow \bigcup_{\psi \in S(A)} \mathcal{H}_\psi \text{ tal que } \xi(\psi) = \begin{cases} 0 & \text{si } \psi \neq \varphi, \\ \xi_\varphi & \text{si } \psi = \varphi. \end{cases}$$

Entonces $\xi \in \bigoplus_{\psi \in S(A)} \mathcal{H}_\psi = \mathcal{H}_u$. Por lo tanto:

Continuación de la prueba.

$$\|\pi_u(a)\xi\|^2 = \langle \pi_u(a)\xi, \pi_u(a)\xi \rangle$$

Continuación de la prueba.

$$\|\pi_u(a)\xi\|^2 = \langle \pi_u(a)\xi, \pi_u(a)\xi \rangle$$

Continuación de la prueba.

$$\begin{aligned}\|\pi_u(a)\xi\|^2 &= \langle \pi_u(a)\xi, \pi_u(a)\xi \rangle \\ &= \sum_{\psi \in S(A)} \langle \pi_\psi(a)\xi(\psi), \pi_\psi(a)\xi(\psi) \rangle_{\mathcal{H}_\psi}\end{aligned}$$

Continuación de la prueba.

$$\begin{aligned}\|\pi_u(a)\xi\|^2 &= \langle \pi_u(a)\xi, \pi_u(a)\xi \rangle \\ &= \sum_{\psi \in S(A)} \langle \pi_\psi(a)\xi(\psi), \pi_\psi(a)\xi(\psi) \rangle_{\mathcal{H}_\psi} \\ &= \langle \pi_\varphi(a)\xi_\varphi, \pi_\varphi(a)\xi_\varphi \rangle_{\mathcal{H}_\varphi}\end{aligned}$$

Continuación de la prueba.

$$\begin{aligned}\|\pi_u(a)\xi\|^2 &= \langle \pi_u(a)\xi, \pi_u(a)\xi \rangle \\ &= \sum_{\psi \in S(A)} \langle \pi_\psi(a)\xi(\psi), \pi_\psi(a)\xi(\psi) \rangle_{\mathcal{H}_\psi} \\ &= \langle \pi_\varphi(a)\xi_\varphi, \pi_\varphi(a)\xi_\varphi \rangle_{\mathcal{H}_\varphi} \\ &= \langle \pi_\varphi(a^*a)\xi_\varphi, \xi_\varphi \rangle_{\mathcal{H}_\varphi}\end{aligned}$$

Continuación de la prueba.

$$\begin{aligned}\|\pi_u(a)\xi\|^2 &= \langle \pi_u(a)\xi, \pi_u(a)\xi \rangle \\ &= \sum_{\psi \in S(A)} \langle \pi_\psi(a)\xi(\psi), \pi_\psi(a)\xi(\psi) \rangle_{\mathcal{H}_\psi} \\ &= \langle \pi_\varphi(a)\xi_\varphi, \pi_\varphi(a)\xi_\varphi \rangle_{\mathcal{H}_\varphi} \\ &= \langle \pi_\varphi(a^*a)\xi_\varphi, \xi_\varphi \rangle_{\mathcal{H}_\varphi} \\ &= \varphi(a^*a)\end{aligned}$$

Continuación de la prueba.

$$\begin{aligned}\|\pi_u(a)\xi\|^2 &= \langle \pi_u(a)\xi, \pi_u(a)\xi \rangle \\ &= \sum_{\psi \in S(A)} \langle \pi_\psi(a)\xi(\psi), \pi_\psi(a)\xi(\psi) \rangle_{\mathcal{H}_\psi} \\ &= \langle \pi_\varphi(a)\xi_\varphi, \pi_\varphi(a)\xi_\varphi \rangle_{\mathcal{H}_\varphi} \\ &= \langle \pi_\varphi(a^*a)\xi_\varphi, \xi_\varphi \rangle_{\mathcal{H}_\varphi} \\ &= \varphi(a^*a) \\ &= \|a\|^2.\end{aligned}$$

Continuación de la prueba.

$$\begin{aligned}\|\pi_u(a)\xi\|^2 &= \langle \pi_u(a)\xi, \pi_u(a)\xi \rangle \\ &= \sum_{\psi \in S(A)} \langle \pi_\psi(a)\xi(\psi), \pi_\psi(a)\xi(\psi) \rangle_{\mathcal{H}_\psi} \\ &= \langle \pi_\varphi(a)\xi_\varphi, \pi_\varphi(a)\xi_\varphi \rangle_{\mathcal{H}_\varphi} \\ &= \langle \pi_\varphi(a^*a)\xi_\varphi, \xi_\varphi \rangle_{\mathcal{H}_\varphi} \\ &= \varphi(a^*a) \\ &= \|a\|^2.\end{aligned}$$

Entonces π_u es fiel.

Continuación de la prueba.

$$\begin{aligned}\|\pi_u(a)\xi\|^2 &= \langle \pi_u(a)\xi, \pi_u(a)\xi \rangle \\ &= \sum_{\psi \in S(A)} \langle \pi_\psi(a)\xi(\psi), \pi_\psi(a)\xi(\psi) \rangle_{\mathcal{H}_\psi} \\ &= \langle \pi_\varphi(a)\xi_\varphi, \pi_\varphi(a)\xi_\varphi \rangle_{\mathcal{H}_\varphi} \\ &= \langle \pi_\varphi(a^*a)\xi_\varphi, \xi_\varphi \rangle_{\mathcal{H}_\varphi} \\ &= \varphi(a^*a) \\ &= \|a\|^2.\end{aligned}$$

Entonces π_u es fiel.

Proposición

Si A es separable existe una representación fiel $\pi : A \rightarrow B(\mathcal{H})$ con $\mathcal{H}$ separable.

Demostración.

Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un subconjunto denso en A .

Demostración.

Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un subconjunto denso en A .

Demostración.

Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un subconjunto denso en A . Para cada n existe $\varphi_n \in S(A)$ tal que $\varphi_n(a_n^* a_n) = \|a_n\|^2$.

Demostración.

Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un subconjunto denso en A . Para cada n existe $\varphi_n \in S(A)$ tal que $\varphi_n(a_n^* a_n) = \|a_n\|^2$. Sean $(\mathcal{H}_n, \xi_n, \pi_n)$ la construcción GNS de φ_n ,

Demostración.

Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un subconjunto denso en A . Para cada n existe $\varphi_n \in S(A)$ tal que $\varphi_n(a_n^* a_n) = \|a_n\|^2$. Sean $(\mathcal{H}_n, \xi_n, \pi_n)$ la construcción GNS de φ_n ,

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_n,$$

Demostración.

Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un subconjunto denso en A . Para cada n existe $\varphi_n \in S(A)$ tal que $\varphi_n(a_n^* a_n) = \|a_n\|^2$. Sean $(\mathcal{H}_n, \xi_n, \pi_n)$ la construcción GNS de φ_n ,

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_n, \quad \pi = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \pi_n,$$

Demostración.

Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un subconjunto denso en A . Para cada n existe $\varphi_n \in S(A)$ tal que $\varphi_n(a_n^* a_n) = \|a_n\|^2$. Sean $(\mathcal{H}_n, \xi_n, \pi_n)$ la construcción GNS de φ_n ,

$\mathcal{H} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_n$, $\pi = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \pi_n$, y $\tilde{\xi}_n \in \mathcal{H}_n$ tal que $\tilde{\xi}(m) = \begin{cases} 0 & n \neq m, \\ \xi_n & n = m. \end{cases}$

Demostración.

Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un subconjunto denso en A . Para cada n existe $\varphi_n \in S(A)$ tal que $\varphi_n(a_n^* a_n) = \|a_n\|^2$. Sean $(\mathcal{H}_n, \xi_n, \pi_n)$ la construcción GNS de φ_n ,

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_n, \quad \pi = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \pi_n, \quad \text{y } \tilde{\xi}_n \in \mathcal{H}_n \text{ tal que } \tilde{\xi}(m) = \begin{cases} 0 & n \neq m, \\ \xi_n & n = m. \end{cases}$$

Notar que $\|\tilde{\xi}_n\|^2 = \|\xi_n\|^2 = \|\varphi_n\| = 1$.

Demostración.

Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un subconjunto denso en A . Para cada n existe $\varphi_n \in S(A)$ tal que $\varphi_n(a_n^* a_n) = \|a_n\|^2$. Sean $(\mathcal{H}_n, \xi_n, \pi_n)$ la construcción GNS de φ_n ,

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_n, \quad \pi = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \pi_n, \quad \text{y } \tilde{\xi}_n \in \mathcal{H}_n \text{ tal que } \tilde{\xi}(m) = \begin{cases} 0 & n \neq m, \\ \xi_n & n = m. \end{cases}$$

Notar que $\|\tilde{\xi}_n\|^2 = \|\xi_n\|^2 = \|\varphi_n\| = 1$. Entonces

Demostración.

Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un subconjunto denso en A . Para cada n existe $\varphi_n \in S(A)$ tal que $\varphi_n(a_n^* a_n) = \|a_n\|^2$. Sean $(\mathcal{H}_n, \xi_n, \pi_n)$ la construcción GNS de φ_n ,

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_n, \quad \pi = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \pi_n, \quad \text{y } \tilde{\xi}_n \in \mathcal{H}_n \text{ tal que } \tilde{\xi}(m) = \begin{cases} 0 & n \neq m, \\ \xi_n & n = m. \end{cases}$$

Notar que $\|\tilde{\xi}_n\|^2 = \|\xi_n\|^2 = \|\varphi_n\| = 1$. Entonces

(a) $\mathcal{H}_k$ es separable:

Demostración.

Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un subconjunto denso en A . Para cada n existe $\varphi_n \in S(A)$ tal que $\varphi_n(a_n^* a_n) = \|a_n\|^2$. Sean $(\mathcal{H}_n, \xi_n, \pi_n)$ la construcción GNS de φ_n ,

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_n, \quad \pi = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \pi_n, \quad \text{y } \tilde{\xi}_n \in \mathcal{H}_n \text{ tal que } \tilde{\xi}(m) = \begin{cases} 0 & n \neq m, \\ \xi_n & n = m. \end{cases}$$

Notar que $\|\tilde{\xi}_n\|^2 = \|\xi_n\|^2 = \|\varphi_n\| = 1$. Entonces

(a) $\mathcal{H}_k$ es separable:

Demostración.

Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un subconjunto denso en A . Para cada n existe $\varphi_n \in S(A)$ tal que $\varphi_n(a_n^* a_n) = \|a_n\|^2$. Sean $(\mathcal{H}_n, \xi_n, \pi_n)$ la construcción GNS de φ_n ,

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_n, \quad \pi = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \pi_n, \quad \text{y } \tilde{\xi}_n \in \mathcal{H}_n \text{ tal que } \tilde{\xi}(m) = \begin{cases} 0 & n \neq m, \\ \xi_n & n = m. \end{cases}$$

Notar que $\|\tilde{\xi}_n\|^2 = \|\xi_n\|^2 = \|\varphi_n\| = 1$. Entonces

(a) $\mathcal{H}_k$ es separable: recordar que $\mathcal{H}_k$ es la completación de $\frac{A}{N_k}$,

Demostración.

Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un subconjunto denso en A . Para cada n existe $\varphi_n \in S(A)$ tal que $\varphi_n(a_n^* a_n) = \|a_n\|^2$. Sean $(\mathcal{H}_n, \xi_n, \pi_n)$ la construcción GNS de φ_n ,

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_n, \quad \pi = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \pi_n, \quad \text{y } \tilde{\xi}_n \in \mathcal{H}_n \text{ tal que } \tilde{\xi}(m) = \begin{cases} 0 & n \neq m, \\ \xi_n & n = m. \end{cases}$$

Notar que $\|\tilde{\xi}_n\|^2 = \|\xi_n\|^2 = \|\varphi_n\| = 1$. Entonces

(a) $\mathcal{H}_k$ es separable: recordar que $\mathcal{H}_k$ es la completación de $\frac{A}{N_k}$, donde $N_k = \{a \in A : \varphi_k(a^* a) = 0\}$,

Demostración.

Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un subconjunto denso en A . Para cada n existe $\varphi_n \in S(A)$ tal que $\varphi_n(a_n^* a_n) = \|a_n\|^2$. Sean $(\mathcal{H}_n, \xi_n, \pi_n)$ la construcción GNS de φ_n ,

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_n, \quad \pi = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \pi_n, \quad \text{y } \tilde{\xi}_n \in \mathcal{H}_n \text{ tal que } \tilde{\xi}(m) = \begin{cases} 0 & n \neq m, \\ \xi_n & n = m. \end{cases}$$

Notar que $\|\tilde{\xi}_n\|^2 = \|\xi_n\|^2 = \|\varphi_n\| = 1$. Entonces

- (a) $\mathcal{H}_k$ es separable: recordar que $\mathcal{H}_k$ es la completación de $\frac{A}{N_k}$, donde $N_k = \{a \in A : \varphi_k(a^* a) = 0\}$, con el producto interno $\langle q(a), q(b) \rangle = \varphi_k(b^* a)$.

Demostración.

Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un subconjunto denso en A . Para cada n existe $\varphi_n \in S(A)$ tal que $\varphi_n(a_n^* a_n) = \|a_n\|^2$. Sean $(\mathcal{H}_n, \xi_n, \pi_n)$ la construcción GNS de φ_n ,

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_n, \quad \pi = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \pi_n, \quad \text{y } \tilde{\xi}_n \in \mathcal{H}_n \text{ tal que } \tilde{\xi}(m) = \begin{cases} 0 & n \neq m, \\ \xi_n & n = m. \end{cases}$$

Notar que $\|\tilde{\xi}_n\|^2 = \|\xi_n\|^2 = \|\varphi_n\| = 1$. Entonces

- (a) $\mathcal{H}_k$ es separable: recordar que $\mathcal{H}_k$ es la completación de $\frac{A}{N_k}$, donde $N_k = \{a \in A : \varphi_k(a^* a) = 0\}$, con el producto interno $\langle q(a), q(b) \rangle = \varphi_k(b^* a)$. Se tiene que $\{q(a_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es denso en $\mathcal{H}_k$.

Demostración.

Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un subconjunto denso en A . Para cada n existe $\varphi_n \in S(A)$ tal que $\varphi_n(a_n^* a_n) = \|a_n\|^2$. Sean $(\mathcal{H}_n, \xi_n, \pi_n)$ la construcción GNS de φ_n ,

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_n, \quad \pi = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \pi_n, \quad \text{y } \tilde{\xi}_n \in \mathcal{H}_n \text{ tal que } \tilde{\xi}(m) = \begin{cases} 0 & n \neq m, \\ \xi_n & n = m. \end{cases}$$

Notar que $\|\tilde{\xi}_n\|^2 = \|\xi_n\|^2 = \|\varphi_n\| = 1$. Entonces

- (a) $\mathcal{H}_k$ es separable: recordar que $\mathcal{H}_k$ es la completación de $\frac{A}{N_k}$, donde $N_k = \{a \in A : \varphi_k(a^* a) = 0\}$, con el producto interno $\langle q(a), q(b) \rangle = \varphi_k(b^* a)$. Se tiene que $\{q(a_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es denso en $\mathcal{H}_k$.
- (b) $\mathcal{H}$ es separable,

Demostración.

Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un subconjunto denso en A . Para cada n existe $\varphi_n \in S(A)$ tal que $\varphi_n(a_n^* a_n) = \|a_n\|^2$. Sean $(\mathcal{H}_n, \xi_n, \pi_n)$ la construcción GNS de φ_n ,

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_n, \quad \pi = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \pi_n, \quad \text{y } \tilde{\xi}_n \in \mathcal{H}_n \text{ tal que } \tilde{\xi}(m) = \begin{cases} 0 & n \neq m, \\ \xi_n & n = m. \end{cases}$$

Notar que $\|\tilde{\xi}_n\|^2 = \|\xi_n\|^2 = \|\varphi_n\| = 1$. Entonces

- (a) $\mathcal{H}_k$ es separable: recordar que $\mathcal{H}_k$ es la completación de $\frac{A}{N_k}$, donde $N_k = \{a \in A : \varphi_k(a^* a) = 0\}$, con el producto interno $\langle q(a), q(b) \rangle = \varphi_k(b^* a)$. Se tiene que $\{q(a_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es denso en $\mathcal{H}_k$.
- (b) $\mathcal{H}$ es separable,

Demostración.

Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un subconjunto denso en A . Para cada n existe $\varphi_n \in S(A)$ tal que $\varphi_n(a_n^* a_n) = \|a_n\|^2$. Sean $(\mathcal{H}_n, \xi_n, \pi_n)$ la construcción GNS de φ_n ,

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_n, \quad \pi = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \pi_n, \quad \text{y } \tilde{\xi}_n \in \mathcal{H}_n \text{ tal que } \tilde{\xi}(m) = \begin{cases} 0 & n \neq m, \\ \xi_n & n = m. \end{cases}$$

Notar que $\|\tilde{\xi}_n\|^2 = \|\xi_n\|^2 = \|\varphi_n\| = 1$. Entonces

- (a) $\mathcal{H}_k$ es separable: recordar que $\mathcal{H}_k$ es la completación de $\frac{A}{N_k}$, donde $N_k = \{a \in A : \varphi_k(a^* a) = 0\}$, con el producto interno $\langle q(a), q(b) \rangle = \varphi_k(b^* a)$. Se tiene que $\{q(a_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es denso en $\mathcal{H}_k$.
- (b) $\mathcal{H}$ es separable, porque es suma directa numerable de espacios separables.

Demostración.

Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un subconjunto denso en A . Para cada n existe $\varphi_n \in S(A)$ tal que $\varphi_n(a_n^* a_n) = \|a_n\|^2$. Sean $(\mathcal{H}_n, \xi_n, \pi_n)$ la construcción GNS de φ_n ,

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_n, \quad \pi = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \pi_n, \quad \text{y } \tilde{\xi}_n \in \mathcal{H}_n \text{ tal que } \tilde{\xi}(m) = \begin{cases} 0 & n \neq m, \\ \xi_n & n = m. \end{cases}$$

Notar que $\|\tilde{\xi}_n\|^2 = \|\xi_n\|^2 = \|\varphi_n\| = 1$. Entonces

- (a) $\mathcal{H}_k$ es separable: recordar que $\mathcal{H}_k$ es la completación de $\frac{A}{N_k}$, donde $N_k = \{a \in A : \varphi_k(a^* a) = 0\}$, con el producto interno $\langle q(a), q(b) \rangle = \varphi_k(b^* a)$. Se tiene que $\{q(a_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es denso en $\mathcal{H}_k$.
- (b) $\mathcal{H}$ es separable, porque es suma directa numerable de espacios separables.
- (c) π es fiel:

Demostración.

Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un subconjunto denso en A . Para cada n existe $\varphi_n \in S(A)$ tal que $\varphi_n(a_n^* a_n) = \|a_n\|^2$. Sean $(\mathcal{H}_n, \xi_n, \pi_n)$ la construcción GNS de φ_n ,

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_n, \quad \pi = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \pi_n, \quad \text{y } \tilde{\xi}_n \in \mathcal{H}_n \text{ tal que } \tilde{\xi}(m) = \begin{cases} 0 & n \neq m, \\ \xi_n & n = m. \end{cases}$$

Notar que $\|\tilde{\xi}_n\|^2 = \|\xi_n\|^2 = \|\varphi_n\| = 1$. Entonces

- (a) $\mathcal{H}_k$ es separable: recordar que $\mathcal{H}_k$ es la completación de $\frac{A}{N_k}$, donde $N_k = \{a \in A : \varphi_k(a^* a) = 0\}$, con el producto interno $\langle q(a), q(b) \rangle = \varphi_k(b^* a)$. Se tiene que $\{q(a_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es denso en $\mathcal{H}_k$.
- (b) $\mathcal{H}$ es separable, porque es suma directa numerable de espacios separables.
- (c) π es fiel:

Demostración.

Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un subconjunto denso en A . Para cada n existe $\varphi_n \in S(A)$ tal que $\varphi_n(a_n^* a_n) = \|a_n\|^2$. Sean $(\mathcal{H}_n, \xi_n, \pi_n)$ la construcción GNS de φ_n ,

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_n, \quad \pi = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \pi_n, \quad \text{y } \tilde{\xi}_n \in \mathcal{H}_n \text{ tal que } \tilde{\xi}(m) = \begin{cases} 0 & n \neq m, \\ \xi_n & n = m. \end{cases}$$

Notar que $\|\tilde{\xi}_n\|^2 = \|\xi_n\|^2 = \|\varphi_n\| = 1$. Entonces

- (a) $\mathcal{H}_k$ es separable: recordar que $\mathcal{H}_k$ es la completación de $\frac{A}{N_k}$, donde $N_k = \{a \in A : \varphi_k(a^* a) = 0\}$, con el producto interno $\langle q(a), q(b) \rangle = \varphi_k(b^* a)$. Se tiene que $\{q(a_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es denso en $\mathcal{H}_k$.
- (b) $\mathcal{H}$ es separable, porque es suma directa numerable de espacios separables.
- (c) π es fiel: basta ver que $\|\pi(a_n)\| = \|a_n\|$ para todo n .

Demostración.

Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un subconjunto denso en A . Para cada n existe $\varphi_n \in S(A)$ tal que $\varphi_n(a_n^* a_n) = \|a_n\|^2$. Sean $(\mathcal{H}_n, \xi_n, \pi_n)$ la construcción GNS de φ_n ,

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_n, \quad \pi = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \pi_n, \quad \text{y } \tilde{\xi}_n \in \mathcal{H}_n \text{ tal que } \tilde{\xi}(m) = \begin{cases} 0 & n \neq m, \\ \xi_n & n = m. \end{cases}$$

Notar que $\|\tilde{\xi}_n\|^2 = \|\xi_n\|^2 = \|\varphi_n\| = 1$. Entonces

- (a) $\mathcal{H}_k$ es separable: recordar que $\mathcal{H}_k$ es la completación de $\frac{A}{N_k}$, donde $N_k = \{a \in A : \varphi_k(a^* a) = 0\}$, con el producto interno $\langle q(a), q(b) \rangle = \varphi_k(b^* a)$. Se tiene que $\{q(a_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es denso en $\mathcal{H}_k$.
- (b) $\mathcal{H}$ es separable, porque es suma directa numerable de espacios separables.
- (c) π es fiel: basta ver que $\|\pi(a_n)\| = \|a_n\|$ para todo n .

$$\|\pi(a_n)\|^2 \geq \|\pi(a_n)\tilde{\xi}_n\|^2$$

Demostración.

Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un subconjunto denso en A . Para cada n existe $\varphi_n \in S(A)$ tal que $\varphi_n(a_n^* a_n) = \|a_n\|^2$. Sean $(\mathcal{H}_n, \xi_n, \pi_n)$ la construcción GNS de φ_n ,

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_n, \quad \pi = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \pi_n, \quad \text{y } \tilde{\xi}_n \in \mathcal{H}_n \text{ tal que } \tilde{\xi}(m) = \begin{cases} 0 & n \neq m, \\ \xi_n & n = m. \end{cases}$$

Notar que $\|\tilde{\xi}_n\|^2 = \|\xi_n\|^2 = \|\varphi_n\| = 1$. Entonces

- (a) $\mathcal{H}_k$ es separable: recordar que $\mathcal{H}_k$ es la completación de $\frac{A}{N_k}$, donde $N_k = \{a \in A : \varphi_k(a^* a) = 0\}$, con el producto interno $\langle q(a), q(b) \rangle = \varphi_k(b^* a)$. Se tiene que $\{q(a_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es denso en $\mathcal{H}_k$.
- (b) $\mathcal{H}$ es separable, porque es suma directa numerable de espacios separables.
- (c) π es fiel: basta ver que $\|\pi(a_n)\| = \|a_n\|$ para todo n .

$$\|\pi(a_n)\|^2 \geq \|\pi(a_n)\tilde{\xi}_n\|^2 = \langle \pi(a_n^* a_n)\tilde{\xi}_n, \tilde{\xi}_n \rangle$$

Demostración.

Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un subconjunto denso en A . Para cada n existe $\varphi_n \in S(A)$ tal que $\varphi_n(a_n^* a_n) = \|a_n\|^2$. Sean $(\mathcal{H}_n, \xi_n, \pi_n)$ la construcción GNS de φ_n ,

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_n, \quad \pi = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \pi_n, \quad \text{y } \tilde{\xi}_n \in \mathcal{H}_n \text{ tal que } \tilde{\xi}(m) = \begin{cases} 0 & n \neq m, \\ \xi_n & n = m. \end{cases}$$

Notar que $\|\tilde{\xi}_n\|^2 = \|\xi_n\|^2 = \|\varphi_n\| = 1$. Entonces

- (a) $\mathcal{H}_k$ es separable: recordar que $\mathcal{H}_k$ es la completación de $\frac{A}{N_k}$, donde $N_k = \{a \in A : \varphi_k(a^* a) = 0\}$, con el producto interno $\langle q(a), q(b) \rangle = \varphi_k(b^* a)$. Se tiene que $\{q(a_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es denso en $\mathcal{H}_k$.
- (b) $\mathcal{H}$ es separable, porque es suma directa numerable de espacios separables.
- (c) π es fiel: basta ver que $\|\pi(a_n)\| = \|a_n\|$ para todo n .

$$\|\pi(a_n)\|^2 \geq \|\pi(a_n)\tilde{\xi}_n\|^2 = \langle \pi(a_n^* a_n)\tilde{\xi}_n, \tilde{\xi}_n \rangle = \langle \pi_n(a_n^* a_n)\xi_n, \xi_n \rangle$$

Demostración.

Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un subconjunto denso en A . Para cada n existe $\varphi_n \in S(A)$ tal que $\varphi_n(a_n^* a_n) = \|a_n\|^2$. Sean $(\mathcal{H}_n, \xi_n, \pi_n)$ la construcción GNS de φ_n ,

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_n, \quad \pi = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \pi_n, \quad \text{y } \tilde{\xi}_n \in \mathcal{H}_n \text{ tal que } \tilde{\xi}(m) = \begin{cases} 0 & n \neq m, \\ \xi_n & n = m. \end{cases}$$

Notar que $\|\tilde{\xi}_n\|^2 = \|\xi_n\|^2 = \|\varphi_n\| = 1$. Entonces

- (a) $\mathcal{H}_k$ es separable: recordar que $\mathcal{H}_k$ es la completación de $\frac{A}{N_k}$, donde $N_k = \{a \in A : \varphi_k(a^* a) = 0\}$, con el producto interno $\langle q(a), q(b) \rangle = \varphi_k(b^* a)$. Se tiene que $\{q(a_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es denso en $\mathcal{H}_k$.
- (b) $\mathcal{H}$ es separable, porque es suma directa numerable de espacios separables.
- (c) π es fiel: basta ver que $\|\pi(a_n)\| = \|a_n\|$ para todo n .

$$\begin{aligned} \|\pi(a_n)\|^2 &\geq \|\pi(a_n)\tilde{\xi}_n\|^2 = \langle \pi(a_n^* a_n)\tilde{\xi}_n, \tilde{\xi}_n \rangle = \langle \pi_n(a_n^* a_n)\xi_n, \xi_n \rangle \\ &= \varphi(a_n^* a_n) \end{aligned}$$

Demostración.

Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un subconjunto denso en A . Para cada n existe $\varphi_n \in S(A)$ tal que $\varphi_n(a_n^* a_n) = \|a_n\|^2$. Sean $(\mathcal{H}_n, \xi_n, \pi_n)$ la construcción GNS de φ_n ,

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_n, \quad \pi = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \pi_n, \quad \text{y } \tilde{\xi}_n \in \mathcal{H}_n \text{ tal que } \tilde{\xi}(m) = \begin{cases} 0 & n \neq m, \\ \xi_n & n = m. \end{cases}$$

Notar que $\|\tilde{\xi}_n\|^2 = \|\xi_n\|^2 = \|\varphi_n\| = 1$. Entonces

- (a) $\mathcal{H}_k$ es separable: recordar que $\mathcal{H}_k$ es la completación de $\frac{A}{N_k}$, donde $N_k = \{a \in A : \varphi_k(a^* a) = 0\}$, con el producto interno $\langle q(a), q(b) \rangle = \varphi_k(b^* a)$. Se tiene que $\{q(a_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es denso en $\mathcal{H}_k$.
- (b) $\mathcal{H}$ es separable, porque es suma directa numerable de espacios separables.
- (c) π es fiel: basta ver que $\|\pi(a_n)\| = \|a_n\|$ para todo n .

$$\begin{aligned} \|\pi(a_n)\|^2 &\geq \|\pi(a_n)\tilde{\xi}_n\|^2 = \langle \pi(a_n^* a_n)\tilde{\xi}_n, \tilde{\xi}_n \rangle = \langle \pi_n(a_n^* a_n)\xi_n, \xi_n \rangle \\ &= \varphi(a_n^* a_n) = \|a_n\|^2 \end{aligned}$$

Demostración.

Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un subconjunto denso en A . Para cada n existe $\varphi_n \in S(A)$ tal que $\varphi_n(a_n^* a_n) = \|a_n\|^2$. Sean $(\mathcal{H}_n, \xi_n, \pi_n)$ la construcción GNS de φ_n ,

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_n, \quad \pi = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \pi_n, \quad \text{y } \tilde{\xi}_n \in \mathcal{H}_n \text{ tal que } \tilde{\xi}(m) = \begin{cases} 0 & n \neq m, \\ \xi_n & n = m. \end{cases}$$

Notar que $\|\tilde{\xi}_n\|^2 = \|\xi_n\|^2 = \|\varphi_n\| = 1$. Entonces

- (a) $\mathcal{H}_k$ es separable: recordar que $\mathcal{H}_k$ es la completación de $\frac{A}{N_k}$, donde $N_k = \{a \in A : \varphi_k(a^* a) = 0\}$, con el producto interno $\langle q(a), q(b) \rangle = \varphi_k(b^* a)$. Se tiene que $\{q(a_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es denso en $\mathcal{H}_k$.
- (b) $\mathcal{H}$ es separable, porque es suma directa numerable de espacios separables.
- (c) π es fiel: basta ver que $\|\pi(a_n)\| = \|a_n\|$ para todo n .

$$\begin{aligned} \|\pi(a_n)\|^2 &\geq \|\pi(a_n)\tilde{\xi}_n\|^2 = \langle \pi(a_n^* a_n)\tilde{\xi}_n, \tilde{\xi}_n \rangle = \langle \pi_n(a_n^* a_n)\xi_n, \xi_n \rangle \\ &= \varphi(a_n^* a_n) = \|a_n\|^2 \geq \|\pi(a_n)\|^2. \end{aligned}$$

Demostración.

Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un subconjunto denso en A . Para cada n existe $\varphi_n \in S(A)$ tal que $\varphi_n(a_n^* a_n) = \|a_n\|^2$. Sean $(\mathcal{H}_n, \xi_n, \pi_n)$ la construcción GNS de φ_n ,

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_n, \quad \pi = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \pi_n, \quad \text{y } \tilde{\xi}_n \in \mathcal{H}_n \text{ tal que } \tilde{\xi}(m) = \begin{cases} 0 & n \neq m, \\ \xi_n & n = m. \end{cases}$$

Notar que $\|\tilde{\xi}_n\|^2 = \|\xi_n\|^2 = \|\varphi_n\| = 1$. Entonces

- (a) $\mathcal{H}_k$ es separable: recordar que $\mathcal{H}_k$ es la completación de $\frac{A}{N_k}$, donde $N_k = \{a \in A : \varphi_k(a^* a) = 0\}$, con el producto interno $\langle q(a), q(b) \rangle = \varphi_k(b^* a)$. Se tiene que $\{q(a_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es denso en $\mathcal{H}_k$.
- (b) $\mathcal{H}$ es separable, porque es suma directa numerable de espacios separables.
- (c) π es fiel: basta ver que $\|\pi(a_n)\| = \|a_n\|$ para todo n .

$$\begin{aligned} \|\pi(a_n)\|^2 &\geq \|\pi(a_n)\tilde{\xi}_n\|^2 = \langle \pi(a_n^* a_n)\tilde{\xi}_n, \tilde{\xi}_n \rangle = \langle \pi_n(a_n^* a_n)\xi_n, \xi_n \rangle \\ &= \varphi_n(a_n^* a_n) = \|a_n\|^2 \geq \|\pi(a_n)\|^2. \end{aligned}$$

Entonces $\|\pi(a_n)\| = \|a_n\|$.



Teorema

Sea $M_n(A) = \{(a_{ij}) : a_{ij} \in A \text{ para todos } i, j = 1, \dots, n\}$,

Teorema

Sea $M_n(A) = \{(a_{ij}) : a_{ij} \in A \text{ para todos } i, j = 1, \dots, n\}$,

Teorema

Sea $M_n(A) = \{(a_{ij}) : a_{ij} \in A \text{ para todos } i, j = 1, \dots, n\}$, donde A una C^* -álgebra,

Teorema

Sea $M_n(A) = \{(a_{ij}) : a_{ij} \in A \text{ para todos } i, j = 1, \dots, n\}$, donde A una C^* -álgebra, $n \in \mathbb{Z}^+$.

Teorema

Sea $M_n(A) = \{(a_{ij}) : a_{ij} \in A \text{ para todos } i, j = 1, \dots, n\}$, donde A una C^* -álgebra, $n \in \mathbb{Z}^+$. Se define:

Teorema

Sea $M_n(A) = \{(a_{ij}) : a_{ij} \in A \text{ para todos } i, j = 1, \dots, n\}$, donde A una C^* -álgebra, $n \in \mathbb{Z}^+$. Se define:

$$(a_{ij})(b_{ij}) = (c_{ij}) \quad \text{donde} \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj},$$

Teorema

Sea $M_n(A) = \{(a_{ij}) : a_{ij} \in A \text{ para todos } i, j = 1, \dots, n\}$, donde A una C^* -álgebra, $n \in \mathbb{Z}^+$. Se define:

$$(a_{ij})(b_{ij}) = (c_{ij}) \quad \text{donde} \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj},$$
$$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

Teorema

Sea $M_n(A) = \{(a_{ij}) : a_{ij} \in A \text{ para todos } i, j = 1, \dots, n\}$, donde A una C^* -álgebra, $n \in \mathbb{Z}^+$. Se define:

$$(a_{ij})(b_{ij}) = (c_{ij}) \quad \text{donde} \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj},$$

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

$$\lambda(a_{ij}) = (\lambda a_{ij})$$

Teorema

Sea $M_n(A) = \{(a_{ij}) : a_{ij} \in A \text{ para todos } i, j = 1, \dots, n\}$, donde A una C^* -álgebra, $n \in \mathbb{Z}^+$. Se define:

$$(a_{ij})(b_{ij}) = (c_{ij}) \quad \text{donde} \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj},$$

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

$$\lambda(a_{ij}) = (\lambda a_{ij})$$

$$(a_{ij})^* = (a_{ji}^*)$$

Teorema

Sea $M_n(A) = \{(a_{ij}) : a_{ij} \in A \text{ para todos } i, j = 1, \dots, n\}$, donde A una C^* -álgebra, $n \in \mathbb{Z}^+$. Se define:

$$(a_{ij})(b_{ij}) = (c_{ij}) \quad \text{donde} \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj},$$

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

$$\lambda(a_{ij}) = (\lambda a_{ij})$$

$$(a_{ij})^* = (a_{ji}^*)$$

Entonces $M_n(A)$ es una $*$ -álgebra,

Teorema

Sea $M_n(A) = \{(a_{ij}) : a_{ij} \in A \text{ para todos } i, j = 1, \dots, n\}$, donde A una C^* -álgebra, $n \in \mathbb{Z}^+$. Se define:

$$(a_{ij})(b_{ij}) = (c_{ij}) \quad \text{donde} \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj},$$

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

$$\lambda(a_{ij}) = (\lambda a_{ij})$$

$$(a_{ij})^* = (a_{ji}^*)$$

Entonces $M_n(A)$ es una $*$ -álgebra, y existe una única norma sobre $M_n(A)$ con la cual $M_n(A)$ es una C^* -álgebra.

Teorema

Sea $M_n(A) = \{(a_{ij}) : a_{ij} \in A \text{ para todos } i, j = 1, \dots, n\}$, donde A una C^* -álgebra, $n \in \mathbb{Z}^+$. Se define:

$$(a_{ij})(b_{ij}) = (c_{ij}) \quad \text{donde} \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj},$$

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

$$\lambda(a_{ij}) = (\lambda a_{ij})$$

$$(a_{ij})^* = (a_{ji}^*)$$

Entonces $M_n(A)$ es una $*$ -álgebra, y existe una única norma sobre $M_n(A)$ con la cual $M_n(A)$ es una C^* -álgebra.

Demostración.

Teorema

Sea $M_n(A) = \{(a_{ij}) : a_{ij} \in A \text{ para todos } i, j = 1, \dots, n\}$, donde A una C^* -álgebra, $n \in \mathbb{Z}^+$. Se define:

$$(a_{ij})(b_{ij}) = (c_{ij}) \quad \text{donde} \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj},$$

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

$$\lambda(a_{ij}) = (\lambda a_{ij})$$

$$(a_{ij})^* = (a_{ji}^*)$$

Entonces $M_n(A)$ es una $*$ -álgebra, y existe una única norma sobre $M_n(A)$ con la cual $M_n(A)$ es una C^* -álgebra.

Demostración.

Teorema

Sea $M_n(A) = \{(a_{ij}) : a_{ij} \in A \text{ para todos } i, j = 1, \dots, n\}$, donde A una C^* -álgebra, $n \in \mathbb{Z}^+$. Se define:

$$\begin{aligned}(a_{ij})(b_{ij}) &= (c_{ij}) \quad \text{donde} \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}, \\(a_{ij}) + (b_{ij}) &= (a_{ij} + b_{ij}) \\ \lambda(a_{ij}) &= (\lambda a_{ij}) \\(a_{ij})^* &= (a_{ji}^*)\end{aligned}$$

Entonces $M_n(A)$ es una $*$ -álgebra, y existe una única norma sobre $M_n(A)$ con la cual $M_n(A)$ es una C^* -álgebra.

Demostración.

Sólo hace falta probar la existencia de una tal C^* -norma.

Teorema

Sea $M_n(A) = \{(a_{ij}) : a_{ij} \in A \text{ para todos } i, j = 1, \dots, n\}$, donde A una C^* -álgebra, $n \in \mathbb{Z}^+$. Se define:

$$\begin{aligned}(a_{ij})(b_{ij}) &= (c_{ij}) \quad \text{donde} \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}, \\(a_{ij}) + (b_{ij}) &= (a_{ij} + b_{ij}) \\ \lambda(a_{ij}) &= (\lambda a_{ij}) \\(a_{ij})^* &= (a_{ji}^*)\end{aligned}$$

Entonces $M_n(A)$ es una $*$ -álgebra, y existe una única norma sobre $M_n(A)$ con la cual $M_n(A)$ es una C^* -álgebra.

Demostración.

Sólo hace falta probar la existencia de una tal C^* -norma. Por el teorema de Gelfand-Naimark se puede suponer que $A \subseteq B(\mathcal{H})$.

Teorema

Sea $M_n(A) = \{(a_{ij}) : a_{ij} \in A \text{ para todos } i, j = 1, \dots, n\}$, donde A una C^* -álgebra, $n \in \mathbb{Z}^+$. Se define:

$$\begin{aligned}(a_{ij})(b_{ij}) &= (c_{ij}) \quad \text{donde} \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}, \\(a_{ij}) + (b_{ij}) &= (a_{ij} + b_{ij}) \\ \lambda(a_{ij}) &= (\lambda a_{ij}) \\(a_{ij})^* &= (a_{ji}^*)\end{aligned}$$

Entonces $M_n(A)$ es una $*$ -álgebra, y existe una única norma sobre $M_n(A)$ con la cual $M_n(A)$ es una C^* -álgebra.

Demostración.

Sólo hace falta probar la existencia de una tal C^* -norma. Por el teorema de Gelfand-Naimark se puede suponer que $A \subseteq B(\mathcal{H})$. Como $B(\mathcal{H} \oplus \dots \oplus \mathcal{H}) \cong M_n(B(\mathcal{H}))$,

Teorema

Sea $M_n(A) = \{(a_{ij}) : a_{ij} \in A \text{ para todos } i, j = 1, \dots, n\}$, donde A una C^* -álgebra, $n \in \mathbb{Z}^+$. Se define:

$$\begin{aligned}(a_{ij})(b_{ij}) &= (c_{ij}) \quad \text{donde} \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}, \\(a_{ij}) + (b_{ij}) &= (a_{ij} + b_{ij}) \\ \lambda(a_{ij}) &= (\lambda a_{ij}) \\(a_{ij})^* &= (a_{ji}^*)\end{aligned}$$

Entonces $M_n(A)$ es una $*$ -álgebra, y existe una única norma sobre $M_n(A)$ con la cual $M_n(A)$ es una C^* -álgebra.

Demostración.

Sólo hace falta probar la existencia de una tal C^* -norma. Por el teorema de Gelfand-Naimark se puede suponer que $A \subseteq B(\mathcal{H})$. Como $B(\mathcal{H} \oplus \dots \oplus \mathcal{H}) \cong M_n(B(\mathcal{H}))$, podemos ver $M_n(A) \subseteq B(\mathcal{H}^n)$.

Teorema

Sea $M_n(A) = \{(a_{ij}) : a_{ij} \in A \text{ para todos } i, j = 1, \dots, n\}$, donde A una C^* -álgebra, $n \in \mathbb{Z}^+$. Se define:

$$\begin{aligned}(a_{ij})(b_{ij}) &= (c_{ij}) \quad \text{donde} \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}, \\(a_{ij}) + (b_{ij}) &= (a_{ij} + b_{ij}) \\ \lambda(a_{ij}) &= (\lambda a_{ij}) \\ (a_{ij})^* &= (a_{ji}^*)\end{aligned}$$

Entonces $M_n(A)$ es una $*$ -álgebra, y existe una única norma sobre $M_n(A)$ con la cual $M_n(A)$ es una C^* -álgebra.

Demostración.

Sólo hace falta probar la existencia de una tal C^* -norma. Por el teorema de Gelfand-Naimark se puede suponer que $A \subseteq B(\mathcal{H})$. Como $B(\mathcal{H} \oplus \dots \oplus \mathcal{H}) \cong M_n(B(\mathcal{H}))$, podemos ver $M_n(A) \subseteq B(\mathcal{H}^n)$. Restringiendo la norma de $B(\mathcal{H}^n)$ a $M_n(A)$ obtenemos una C^* -norma sobre $M_n(A)$.

Teorema

Sea $M_n(A) = \{(a_{ij}) : a_{ij} \in A \text{ para todos } i, j = 1, \dots, n\}$, donde A una C^* -álgebra, $n \in \mathbb{Z}^+$. Se define:

$$(a_{ij})(b_{ij}) = (c_{ij}) \quad \text{donde} \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj},$$

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

$$\lambda(a_{ij}) = (\lambda a_{ij})$$

$$(a_{ij})^* = (a_{ji}^*)$$

Entonces $M_n(A)$ es una $*$ -álgebra, y existe una única norma sobre $M_n(A)$ con la cual $M_n(A)$ es una C^* -álgebra.

Demostración.

Sólo hace falta probar la existencia de una tal C^* -norma. Por el teorema de Gelfand-Naimark se puede suponer que $A \subseteq B(\mathcal{H})$. Como $B(\mathcal{H} \oplus \dots \oplus \mathcal{H}) \cong M_n(B(\mathcal{H}))$, podemos ver $M_n(A) \subseteq B(\mathcal{H}^n)$.

Restringiendo la norma de $B(\mathcal{H}^n)$ a $M_n(A)$ obtenemos una C^* -norma sobre $M_n(A)$ (dicha norma es equivalente a: $\|(a_{ij})\| = \max\{\|a_{ij}\| : i, j \geq 1\}$). $\square$

Observación

$M_n(A) = M_n \otimes A$ (*producto tensorial algebraico*).

Observación

$M_n(A) = M_n \otimes A$ (*producto tensorial algebraico*).

Observación

$M_n(A) = M_n \otimes A$ (producto tensorial algebraico). Del teorema anterior se deduce que sobre $M_n \otimes A$ existe una única C^* -norma.

Observación

$M_n(A) = M_n \otimes A$ (producto tensorial algebraico). Del teorema anterior se deduce que sobre $M_n \otimes A$ existe una única C^* -norma. Por eso M_n es una C^* -álgebra nuclear.

Observación

$M_n(A) = M_n \otimes A$ (producto tensorial algebraico). Del teorema anterior se deduce que sobre $M_n \otimes A$ existe una única C^* -norma. Por eso M_n es una C^* -álgebra nuclear. En general, dadas dos C^* -álgebras A y B , puede haber más de una C^* -norma en $A \otimes B$

Observación

$M_n(A) = M_n \otimes A$ (producto tensorial algebraico). Del teorema anterior se deduce que sobre $M_n \otimes A$ existe una única C^* -norma. Por eso M_n es una C^* -álgebra nuclear. En general, dadas dos C^* -álgebras A y B , puede haber más de una C^* -norma en $A \otimes B$ (siempre existe al menos una).

Observación

$M_n(A) = M_n \otimes A$ (producto tensorial algebraico). Del teorema anterior se deduce que sobre $M_n \otimes A$ existe una única C^* -norma. Por eso M_n es una C^* -álgebra nuclear. En general, dadas dos C^* -álgebras A y B , puede haber más de una C^* -norma en $A \otimes B$ (siempre existe al menos una).

Si A es tal que sólo existe una única C^* -norma en $A \otimes B$, para toda C^* -álgebra B , se dice que A es nuclear.

Observación

$M_n(A) = M_n \otimes A$ (producto tensorial algebraico). Del teorema anterior se deduce que sobre $M_n \otimes A$ existe una única C^* -norma. Por eso M_n es una C^* -álgebra nuclear. En general, dadas dos C^* -álgebras A y B , puede haber más de una C^* -norma en $A \otimes B$ (siempre existe al menos una).

Si A es tal que sólo existe una única C^* -norma en $A \otimes B$, para toda C^* -álgebra B , se dice que A es nuclear.